WORKING PAPERS

W.P. 58

3.1 – TECNICHE DI OTTIMIZZAZIONE PER LA LOCALIZZAZIONE DELLE ATTIVITA'

A. Colorni

ires ISTITUTO RICERCHE ECONOMICO - SOCIALI DEL PIEMONTE

Working Paper n. 58

W.P. 58

3.1 – TECNICHE DI OTTIMIZZAZIONE PER LA LOCALIZZAZIONE DELLE ATTIVITA'

A. Colorni

Maggio 1985

Studio condotto nell'ambito del P.F.T. - Sottoprogetto 2, contratto CNR-IRES n. 82.00450.93

RECENTI CONTRIBUTI ALLA MODELLISTICA DEI SISTEMI URBANI E REGIONALI

RIASSUNTO Questo capitolo si propone di esaminare i problemi di localizzazione e la loro connessione con i problemi legati al trasporto secondo l'ottica dei modelli di ottimizzazione e, in generale, della ricerca operativa.

In particolare viene analizzato il ruolo dell'ottimizzazione nei problemi di localizzazione "nello spazio continuo" e "nello spazio discreto", l'utilizzo dei metodi di programmazione lineare, non lineare e mista, della teoria dei grafi e dell'ottimizzazione combinatoria.

Inoltre sono esaminati alcuni aspetti più generali, come l'analisi ed il trattamento dei dati, le procedure di aggregazione e di "clustering", la formulazione e la risoluzione del modello, gli algoritmi ed i programmi di calcolo.

Vengono anche messe in luce le caratteristiche diverse dei processi di localizzazione nel settore privato e nel settore pubblico e, per quest'ultimo, l'importanza di individuare degli indicatori efficienti per confrontare tra loro le varie alternative.

La scala spaziale e la dimensione dei problemi tende ad aumentare continuamente, e ciò anche per le migliorate potenzialità degli strumenti di calcolo: in considerazione di quest'ultimo aspetto, una certa attenzione è anche dedicata all'esame del software esistente, sia dal punto di vista dell'uso dei metodi di ottimizzazione in generale che da quello della complessità computazionale e dell'efficienza dei principali algoritmi proposti.

PAROLE CHIAVE: localizzazione di impianti e servizi, modellistica, ottimizzazione, complessità computazionale.

INDICE

1. INTRODUZIONE

Esamineremo il seguente problema decisionale, che chiameremo problema della localizzazione:

scegliere un insieme di punti convenzionalmente detti impianti selezionandolo tra un numero finito o infinito di punti candidati, allo scopo di minimizzare una (o più) funzione obiettivo contenente costi (almeno in parte) legati alla distribuzione spaziale dei punti scelti ed alla loro distanza da un altro insieme di punti convenzionalmente detti utenti.

La definizione è, volutamente, riduttiva ed è in accordo con il taglio di questo lavoro. In esso infatti:
(a) esamineremo il problema da un punto di vista quantitativo,
(b) lo esamineremo con l'ottica dei modelli matematici di ottimizzazione,
(c) esamineremo prevalentemente la localizzazione di strutture monosettoriali e non di sistemi multisettoriali,
(d) esamineremo sia il settore privato (localizzazione di impianti industriali) che quello pubblico (localizzazione di servizi pubblici).

Viene qui adottato il metodo di analisi ed il punto di vista della ricerca operativa e questo determinerà, indubitabilmente, una lettura solo parziale del fenomeno della localizzazione. Ciò si ha sia perché i modelli di ottimizzazione sono fortemente condizionati da una concezione classica di razionalità (si assume sempre l'esistenza di uno o più decisori che agiscono secondo regole di condotta coerente e ottimale, solo di recente sono stati introdotti alcuni aspetti di "irrazionalità" essenzialmente legandoli alla casualità), sia perché essi sono decisamente influenzati dalle teorie marginaliste dell'economia (basta pensare alla interpretazione economica della programmazione lineare e della teoria della dualità, strutture portanti di una grossa parte della programmazione matematica), sia infine perché i modelli di ottimizzazione trascurano, o inseriscono marginalmente, aspetti come la normativa, gli incentivi/disincentivi alla localizzazione, il reperimento e l'analisi dei dati, l'esame delle tecnologie usate ed altri aspetti legati al trasporto, all'analisi economica, all'impatto ambientale e così via.

Vi sono, evidentemente, altri punti di vista per affrontare il problema della localizzazione, molti dei quali presenti in altri lavori di questa rassegna: a me spetta il compito di esporre l'approccio della ricerca operativa, in particolare dei modelli matematici di ottimizzazione. Vediamo, attraverso alcuni esempi, alcune caratteristiche di questo approccio.

Esempio 1

Un'impresa distribuisce i suoi prodotti da un impianto centrale a parecchi punti di vendita periferici. Per fare ciò desidera localizzare alcuni impianti intermedi (magazzini) che ricevono i prodotti dall'impianto e riforniscono i punti di vendita, in modo da minimizzare i costi totali che sono legati alla produzione, al fluttuare della domanda (e quindi alle quantità immagazzinate), al trasporto e alla distribuzione. Si tratta di un problema con un solo decisore (l'impresa) che governa sia la scelta della localizzazione dei magazzini che quella degli approvvigionamenti (cioè sia il problema di localizzazione che quello di allocazione di risorse). Inoltre la funzione obiettivo è abbastanza facilmente quantificabile (si riduce, in ultima analisi, ad un bilanciamento tra costi di trasporto e costi di costruzione/gestione degli impianti intermedi).

Esempio 2

Un certo numero di terminali sono connessi tra loro da una rete. Presso ciascun terminale sono localizzati alcuni files diversi, che si vogliono rendere disponibili per creare un certo numero di data-bases in alcuni concentratori della rete (non noti). Anche qui il decisore è unico: la sua funzione obiettivo si esprime minimizzando una somma di costi relativi ai canali di trasmissione ed al tempo di utilizzo, nel rispetto delle condizioni di funzionamento della rete.

Esempio 3

L'obiettivo principale di un servizio di ambulanza è quello di essere in grado di giungere sul luogo di chiamata nel più breve tempo possibile. Si vuole decidere dove localizzare un certo numero (fissato) di ambulanze, sulla base di una previsione statistica delle chiamate da parte delle varie zone di territorio da servire. Il criterio del pianificatore, in questo caso, deve tener conto del massimo tempo di risposta ad una chiamata e quindi formulare una funzione obiettivo che minimizzi tale tempo (cioè che esprima il risultato corrispondente al caso peggiore) tenendo conto del numero di ambulanze disponibili.

Esempio 4

Alcuni "gruppi di pressione", ciascuno con un suo peso in qualche modo misurato, concorrono nel formare una decisione che comporta la scelta, per esempio, di due variabili decisionali continue x_1 e x_2, su ognuna delle quali ciascun gruppo esprime la sua scelta.

La rappresentazione delle scelte di ciascun gruppo nello spazio delle variabili (cioè, in questo caso, nel piano $x_1 - x_2$) produce un insieme di punti "pesanti", mentre la ricerca della soluzione di compromesso equivale alla localizzazione della mediana del sistema di tali punti.

Cosa unifica questi casi?

(α) La presenza di un problema decisionale *di natura spaziale* (o ad essa riconducibile, come nei casi 2 e 4).

(β) La possibilità di rappresentare il problema tramite un certo numero di variabili e condizioni di vincolo.

(γ) La formulazione di uno o più criteri di scelta (obiettivi) da parte del decisore.

(δ) La conoscenza (deterministica o stocastica) dei dati del problema e degli effetti della decisione.

Cioè, in ultima analisi, l'uso dei modelli matematici di decisione propri della ricerca operativa: di essi verrà fatta una rassegna in questo lavoro.

Perché tentare una sintesi di questa materia?

Perché la materia è ormai vasta ed assestata.

Perché può essere utile definirne le ipotesi rilevanti e discuterne la significatività rispetto a varie tipologie di problemi.

Per cercare di valutare i diversi modelli rispetto alla loro complessità ed alla struttura dei dati che richiedono.

Perché è possibile ipotizzare alcune linee di sviluppo.

Prima di incominciare, ritengo necessario fare alcune premesse metodologiche.

(1) La rassegna e la sintesi dei modelli verranno fatte attraverso una *schematizzazione* (forse eccessiva) dei fenomeni, nel tentativo di ordinare i numerosi contributi, metodi ed algoritmi esistenti: ricorrerò a numerose classificazioni (un esempio delle quali si ha già in questo primo paragrafo), in larga misura opinabili ed arbitrarie come tutte le classificazioni, ma anche didatticamente utili.

(2) Il *punto di vista* in cui mi colloco è, come già ricordato, quello della ricerca operativa e quindi mi richiamerò:
- all'uso delle tecniche di ottimizzazione, soprattutto la programmazione matematica e l'ottimizzazione combinatoria;
- all'esame delle strutture decisionali complesse attraverso la programmazione a molti obiettivi e/o a molti livelli;
- al confronto di algoritmi e allo studio della loro efficienza;
- all'esame dei codici di calcolo e della loro complessità computazionale.

(3) Ritengo che i modelli matematici vadano intesi essenzialmente come strumenti di *supporto alle decisioni* (senza la pretesa di sostituirsi ad esse); in particolare i modelli servono soprattutto se il problema:
- ha dimensioni e/o complessità rilevanti,
- deve essere risolto molte volte al variare dei dati,
- ha una struttura particolare,
- necessità di un'analisi di sensitività.

(4) La rassegna è fatta sulla base delle principali *riviste internazionali* (si veda il successivo paragrafo 6) e dei libri degli ultimi anni, utilizzando però direttamente soltanto gli articoli ed i libri fondamentali: gli altri possono essere recuperati attraverso articoli di rassegna bibliografica e l'esame delle citate riviste internazionali.

(5) L'esame dei problemi di localizzazione sarà fatto anche con l'aiuto dei *problemi collegati alla localizzazione* (per esempio la zonizzazione, lo scheduling, ecc.) e con l'esame dei settori principali in cui si utilizzano modelli di localizzazione; è persino ovvio dire che l'esame di tali problemi e settori avviene a un diverso livello di dettaglio: ciò dipende dalla loro differente significatività e dalle personali competenze dell'autore.

Voglio ora fare un breve cenno storico sui modelli di localizzazione. Non intendo tracciare la storia di queste tecniche, mi limito ad individuare tre momenti del loro sviluppo che mi paiono significativi:

(i) la formulazione del problema (da Weber fino agli anni '40);

(ii) l'impiego dei modelli per la localizzazione di impianti industriali (gli anni '50 e '60);

(iii) il prevalente sviluppo nel settore dei servizi pubblici (gli anni '70).

Nel primo periodo c'è una completa inadeguatezza degli strumenti di calcolo rispetto al problema, e ciò comporta lo sviluppo di una teoria basata principalmente su risultati geometrico-analitici nello spazio continuo, con il recupero di contributi precedenti anche provenienti da altre discipline (Kuhn, 1973): basta citare i nomi di Cavalieri, Fermat, Steiner.
Il secondo periodo è caratterizzato dal parallelo sviluppo dei calcolatori e della matematica discreta: si passa quindi alla formulazione del problema tramite i grafi (che rappresentano la rete di trasporto e le sue caratteristiche) e la programmazione matematica binaria (che esprime il problema "*si-no*" relativo alla localizzazione in un punto) e si introducono condizioni che tengono conto degli aspetti tecnologici relativi agli impianti (Zimmermann e Sovereign, 1974).
Nel terzo e più recente periodo, caratterizzato da sempre maggiori applicazioni al settore pubblico, si è posto il problema di introdurre indicatori di efficienza diversi dal puro costo e si è ampliato il panorama delle tecniche con le formulazioni di programmi a molti obiettivi e di modelli che tengono conto della non perfetta razionalità dell'utente (Sistemi Urbani, 1981).

Qualora fosse effettuata una approfondita indagine storica sulla classe dei modelli di localizzazione e sulle relative tecniche di risoluzione, emergerebbe con chiarezza la sopravvalutazione (derivata dal loro sviluppo storico) del peso dei costi legati al trasporto, costi che invece risultano sempre meno significativi, almeno nel settore privato-industriale (ciò è forse meno vero nel settore pubblico, perché qui sono spesso differenti gli attori che sostengono i costi di costruzione/gestione dei servizi ed i costi di trasporto).
Un'altra considerazione "storica" è che si sono prodotti in questo settore relativamente pochi risultati teorici (teoremi) e molti risultati applicativi (algoritmi) e ciò è in accordo con la precedente interpretazione di questi metodi come strumenti di supporto al-

le decisioni più che come corpo teorico-matematico a sè stante: inoltre c'è da osservare che anche la produzione di algoritmi va ormai calando.

Il lavoro si può descrivere come segue.
Nel paragrafo 2 vengono messi in luce i collegamenti del problema di localizzazione con altri problemi del processo di pianificazione/gestione.
Nel paragrafo 3 sono esaminate le caratteristiche del problema di localizzazione, i parametri fondamentali e la struttura del modello.
Nel paragrafo 4 vengono brevemente esaminate le tecniche di risoluzione più usate.
Nel paragrafo 5 è fatta una rassegna dei principali modelli, inquadrati in uno schema di riferimento.
Nel paragrafo 6 è esposto un quadro riassuntivo che individua alcune possibili linee di avanzamento.
Le conclusioni del lavoro sono esposte nell'ultimo paragrafo.

2. IL PROBLEMA DELLA LOCALIZZAZIONE NEL CONTESTO DEI PROBLEMI DI PIANIFICAZIONE E GESTIONE

Quello che nel precedente paragrafo abbiamo indicato come problema di localizzazione si inserisce normalmente in un processo decisionale di pianificazione/gestione che ha come supporto fisico il territorio.
Uno schema, tratto da Eilon, Watson-Gandy e Christofides (1971), può essere utilizzato per rappresentare l'insieme dei problemi di tale processo ed è proposto in fig. 1.

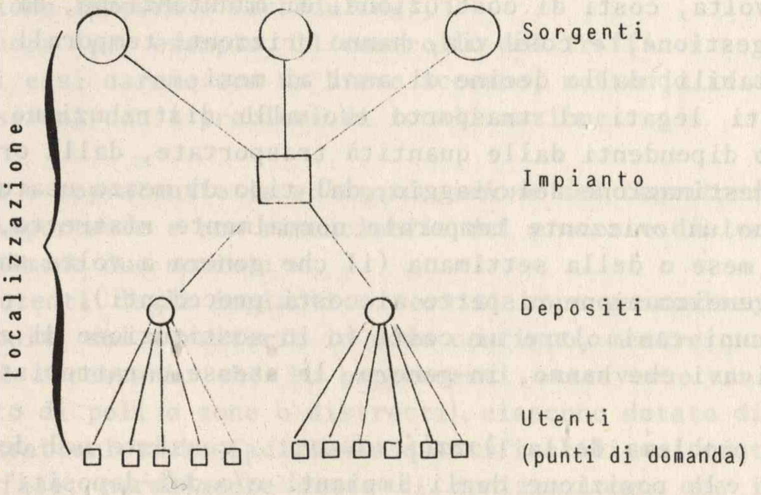


Figura 1 Schematizzazione del sistema

In questa rappresentazione di un sistema logistico sono indicati alcuni punti-sorgente, un impianto, alcuni depositi ed infine gli utenti o punti di domanda. I collegamenti tra i nodi di questo grafo non sono orientati perché, a seconda dei problemi, si va dall'alto verso il basso o viceversa.
Tipicamente, in un problema di produzione industriale, il fluire del processo è dalle sorgenti (in cui è localizzata la materia prima) all'impianto (in cui vengono compiute le trasformazioni per ottenere il prodotto) ai depositi intermedi e infine alla domanda finale (gli utenti).
Invece, in un problema di pianificazione/gestione di un servizio pubblico, come lo smaltimento dei rifiuti solidi, il processo va

dai punti di domanda agli eventuali punti di raccolta intermedi all'impianto di smaltimento (in questo caso non esistono ovviamente sorgenti).
Diversamente, in problemi di sviluppo e traffico nelle aree urbane si ha a che fare con movimenti nei due sensi, considerando i punti di residenza come sorgenti ed i luoghi di lavoro come punti di domanda (ed eliminando gli impianti intermedi).

Nel sistema visto sono presenti dei *costi*. Generalmente si tratta di costi di due tipi, associabili in un certo senso ai nodi e agli archi del grafo:

- costi legati agli impianti e/o ai depositi (in qualche caso anche ai clienti e alle sorgenti), che rappresentano, di volta in volta, costi di costruzione, di manutenzione, di ammortamento, di gestione, e così via; hanno orizzonti temporali notevolmente variabili, dalle decine di anni ai mesi;
- costi legati al trasporto e/o alla distribuzione locale, che sono dipendenti dalle quantità trasportate, dalla origine e dalla destinazione del viaggio, dal tipo di mezzo usato, e così via; hanno un orizzonte temporale normalmente ristretto, dell'ordine del mese o della settimana (il che genera a volte un problema di omogeneizzazione rispetto ai costi precedenti).

In alcuni casi oltre ai costi (o in sostituzione di essi) vi sono dei ricavi che hanno, in genere, le stesse caratteristiche.

Il problema della *localizzazione* consiste nel determinare il numero e la posizione degli impianti e/o dei depositi sul territorio in esame.
Le imprese industriali tenderanno ad occupare posizioni che tengano conto sia delle sorgenti di materie prime che dei mercati di sbocco (cioè dei costi associati ad essi).
I servizi pubblici invece si localizzeranno tenendo conto dei punti di domanda, in posizioni baricentriche rispetto ad essi.
I servizi di emergenza, al contrario, si localizzano con una logica che non è quella dei costi di trasporto o di impianto (è evidente infatti che la qualità di un servizio di questo tipo non è legata ai suoi costi ma alla prontezza del suo intervento ed alla disponibilità di uomini e mezzi che è in grado di offrire in risposta ad una domanda casuale).
Per quanto riguarda gli aspetti della protezione ambientale, in particolare l'inquinamento delle acque, la localizzazione degli impianti obbedisce a regole ancora diverse, legate sia ai punti di

domanda (cioè gli scarichi inquinanti) che alle leggi di tipo biologico che regolano il processo di depurazione.

Connessi con i problemi di localizzazione ve ne sono altri, di due categorie differenti che si potrebbero definire l'una di livello strategico ("a monte" della localizzazione) l'altra di livello tattico-operativo ("a valle" di essa).
Della prima categoria fanno parte problemi di:
- analisi e schematizzazione del territorio;
- analisi della struttura decisionale e coordinamento tra decisori di livello diverso.

Della seconda categoria fanno parte problemi di:
- distribuzione spaziale (routing),
- distribuzione temporale (scheduling),

ed altri ancora (per esempio, il controllo del traffico).
Di alcuni di essi daremo ora un breve accenno, mettendo in evidenza le connessioni con i problemi di localizzazione.

L'analisi e soprattutto la *schematizzazione del territorio* è una fase assai importante e non rinunciabile del processo di localizzazione, per almeno due motivi:

(i) gli utenti degli impianti o servizi sono generalmente distribuiti sul territorio in modo continuo, mentre quasi sempre è necessario che li rappresenti attraverso un numero finito di poli (o zone o distretti), ciascuno dotato di alcune caratteristiche facilmente quantificabili; si tratta di una fase, normalmente detta di zonizzazione, che implica in genere l'uso di modelli di programmazione binaria e/o di teoria dei grafi (Garfinkel e Nemhauser, 1972);

(ii) la rete di trasporto che connette tra loro gli utenti e i punti candidati alla localizzazione (qualora questi ultimi siano in numero finito) va esaminata al fine di eliminare le strade non utilizzabili, di aggregare i dati delle altre e soprattutto di determinare l'insieme dei percorsi ottimi (per esempio a minimo costo) tra i vari nodi della rete: quest'ultimo problema, classico della ricerca operativa, si risolve con algoritmi molto efficienti di ottimizzazione combinatoria (Gallo e Pallottino, 1982).

L'esame ed il *coordinamento della struttura decisionale* sono necessari per il fatto che molto spesso, soprattutto nel caso di servizi pubblici, i problemi di localizzazione comportano scelte

che coinvolgono decisori di livello e competenze diverse (basta pensare, per esempio, al controllo di un grande bacino idrico, processo che comporta la localizzazione di numerose stazioni di rilevamento e che interessa enti di bacino, enti locali, enti pubblici per la produzione idroelettrica, industrie private, consorzi agricoli e così via).
Il coordinamento tra le varie componenti del sistema comporta l'uso di modelli decentralizzati e della programmazione a molti obiettivi e/o a molti livelli (Haimes, 1977).

Un diverso insieme di problemi connessi alla localizzazione (e riconducibili allo schema di fig.1)è quello della *distribuzione spaziale* (o routing). Si tratta di problemi operativi, di portata più limitata anche se spesso di dimensioni notevolissime, che intervengono allorché gli impianti sono già localizzati, esaminati allo scopo di organizzare i percorsi nell'area in maniera da far fronte ad una domanda nota spazialmente e costante nel tempo o periodica, con periodo noto; si tratta di minimizzare costi che sono prevalentemente di trasporto, oltre ad eventuali costi di gestione degli impianti.
Problemi di questo tipo sono affrontati con metodi di ottimizzazione combinatoria, il più delle volte metodi euristici a causa delle dimensioni ragguardevoli e della presenza di vincoli che rendono il problema di complessità proibitiva (Bodin et al., 1981).

Con problemi di *distribuzione nel tempo* (o scheduling) intendo riferirmi ai problemi dell'organizzazione di un servizio dal punto di vista dei turni di lavoro, della loro successione e della scelta delle dimensioni del servizio necessarie per far fronte ad una domanda nota e variabile nel tempo. In questo caso, che ha una notevole rilevanza nei servizi pubblici, l'aspetto esaminato con maggiore dettaglio in tema di costi di distribuzione non è quello dei costi di trasporto (e/o di gestione degli impianti). Vi è infatti un costo che in alcuni casi è assolutamente prevalente, fino ad una misura dell'80% ed oltre: si tratta del costo della manodopera, cioè delle squadre che svolgono il servizio, costo legato al numero di persone e al tempo in cui esse sono utilizzate. Anche in questo caso esistono tecniche di programmazione matematica (in particolare di programmazione lineare) che risolvono efficacemente il problema (Bodin,1973, Bodin et al., 1981).

Torniamo ora ai problemi di localizzazione veri e propri. Esiste una notevole differenza (ReVelle, Marks e Liebman, 1970) tra la localizzazione

(α) nel settore privato,

(β) nel settore pubblico.

Nel *settore privato* si tratta prevalentemente di localizzare impianti industriali; si danno, in generale, queste due condizioni:

(α1) esiste un unico decisore (o un'unità di obiettivi della struttura decisionale) cui competono le scelte della localizzazione ed anche, in qualche caso, quelle della allocazione degli utenti agli impianti, cioè del modello di trasporto;

(α2) esistono degli indicatori abbastanza chiari che consentono di quantificare gli obiettivi del decisore, per esempio costi da minimizzare, profitti o quote di mercato da massimizzare, incentivi (Bartezzaghi, 1979).

Inoltre nel settore privato assumono notevole importanza una serie di fattori localizzativi non esprimibili direttamente in termini di costo: su di essi si tornerà brevemente a conclusione di questo paragrafo.

Nel *settore pubblico* si tratta in prevalenza di localizzare dei servizi; si danno, in generale le seguenti condizioni:

(β1) esiste una struttura decisionale articolata, che comprende uno o più decisori pubblici e l'insieme degli utenti; normalmente il decisore pubblico e gli utenti intervengono in fasi diverse del processo, l'uno nella fase di pianificazione-localizzazione e gli altri nella fase di gestione-allocazione, relativamente a costi di natura diversa (Eilon, Watson-Gandy e Christofides, 1971);

(β2) il comportamento degli utenti (anche a causa del loro numero) non è sempre definibile in modo preciso e non è sempre razionale; ciò è in parte tenuto in conto introducendo termini di tipo casuale nel modello (Wilson et al., 1981, Coelho, 1981);

(β3) gli indicatori che esprimono l'efficacia delle varie soluzioni non sono sempre facili da definire ed a volte sono in contrasto tra loro; il problema viene affrontato da un lato utilizzando dei "surrogati" della misura di utilità pubblica per un servizio, dall'altro ricorrendo a meccanismi di aggregazione degli obiettivi o alla programmazione a molti obiettivi (Nijkamp, 1977, Haimes, 1977).

Inoltre nel settore pubblico i problemi di localizzazione hanno caratteristiche anche molto diverse a seconda del contesto a cui sono applicati: in particolare, è possibile individuare (Colorni, 1982) questi esempi di problemi

- localizzazione con creazione di distretti,
- localizzazione con scheduling e/o routing,
- localizzazione e simulazione di processi dinamici,
- localizzazione prevalentemente da vincoli,
- localizzazione con "molti decisori" non razionali,
- localizzazione di servizi di emergenza.

Pur trattandosi, come è ovvio, di una classificazione arbitraria, ritengo che essa consenta di mettere in luce alcune diversità tra i vari problemi, che cercherò di precisare.

Nel primo caso, tipico dei *servizi scolastici* e *socio-sanitari*, la localizzazione è affrontata come un problema strategico nel contesto dell'analisi e della zonizzazione del territorio. A volte il problema è risolto con metodi di programmazione matematica, più spesso con procedura "ad hoc" che tengono conto delle condizioni geografico-amministrative dell'area in esame. Alcuni lavori in questo settore sono stati sviluppati presso l'International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), altri sono sparsi su riviste, per esempio Benito-Alonso e Devaux (1981), Bertuglia, Leonardi e Tadei (1981), e libri, per esempio Helly (1975), Greenberg (1978), Sisson (ed.) (1974).

Il secondo caso ha numerose applicazioni nei servizi pubblici, quali lo *smaltimento dei rifiuti solidi*, la *distribuzione della posta*, la *pulizia delle strade*, ecc. In esso la localizzazione diviene un tipico problema affrontato nel contesto gestionale: spesso infatti si tratta di localizzare impianti intermedi con vita limitata, o addirittura strutture mobili. Uno dei principali centro di ricerca è l'Università del Maryland, anche se lavori in questo settore sono numerosi e sparsi (Sisson (ed.), 1974, Marks, 1976, Beltrami, 1977, Bodin et al., 1981).

Il terzo caso è tipico dei *problemi ambientali*, in particolare delle reti di depurazione e gestione delle *risorse idriche:* in essi la localizzazione non è, in genere, relativa alla scelta dei luoghi ma piuttosto alla scelta del numero e della simensione ottima degli impianti. Inoltre, la particolare natura del prodotto trattato (l'acqua, dal punto di vista quantitativo e/o da quello qualitativo) rende necessario incorporare nel modello gli aspetti dinamici del problema: per questo motivo i modelli che si ottengono devono essere affrontati per mezzo di algoritmi di simulazione mista ad ottimizzazione. I lavori sulla localizzazione sono inseriti in un contesto modellistico più generale (Loucks, Stedinger, Haith, 1981, Rinaldi et al., 1979, Greenberg, 1978).

Il quarto caso ha esempi di applicazione in problemi di *previsione e controllo dei fenomeni atmosferici*, di produzione/distribuzione di energia e in generale di localizzazione di *attività nocive*. In queste occasioni la localizzazione degli impianti non avviene in base ai costi, ma piuttosto in base a ragioni di opportunità politica o ad esigenze tecniche, cioè risulta prevalentemente una localizzazione "da vincoli" più che "da obiettivi". Si noti però che, qualora il problema sia formulato con un modello di ottimizzazione, la funzione obiettivo mostra notevoli analogie con una di quelle relative alla localizzazione dei servizi di emergenza (il criterio del caso peggiore, si veda in seguito). Alcuni lavori, proposti da un gruppo di ricercatori della Johns Hopkins University (ReVelle e altri), sono relativi alla localizzazione di impianti per la produzione di energia e di servizi/attività nocive (Cohn et al.,1980, Cohn et al., 1982), altri riguardano la localizzazione di reti per il rilevamento dell'inquinamento atmosferico e di servizi analoghi (Fortak, 1982).

Nel quinto caso, il tipico dei *problemi di trasporto*, la localizzazione di infrastrutture deve essere fatta tenendo conto di alcune caratteristiche specifiche: prima di tutto la scala territoriale in genere molto vasta e le difficoltà di reperimento e di analisi dei dati del problema, poi il numero molto elevato di decisori (gli utenti) il cui comportamento è spesso caratterizzato da aspetti non razionali e difficilmente quantificabili. Da ciò nasce la necessità di introdurre, in analogia con fenomeni fisici tipicamente stocastici, termini quali l'utilità casuale o l'entropia. I principali lavori sono dovuti alla scuola di Wilson, altri compaiono normalmente nelle riviste di settore come Transportation Science e Transportation Research. Citiamo Wilson et al.(1981), Bertuglia e Leonardi (1982),Helly (1975).

Il sesto caso si riferisce a servizi come *vigili del fuoco, ambulanze, polizia;* la localizzazione, in generale, deve tener conto di due fattori, i costi e il tempo di intervento, non sempre aggregabili in una funzione obiettivo unica. I modi di procedere sono essenzialmente due: o considerare uno dei fattori come un vincolo e l'altro come funzione obiettivo, oppure utilizzare la programmazione a molti obiettivi (in questo caso a due obiettivi). I lavori principali sono dovuti alla scuola americana, in particolare del M.I.T. (Handler e Mirchandani, 1979, Larson e Odoni, 1981, Beltrami, 1977, Beltrami, 1979; ReVelle, Cohon, Shobrys, 1981).

Esaminando, nel seguito, la scelta della struttura decisionale, distingueremo i seguenti criteri di formulazione della funzione obiettivo:

(i) *efficienza* (min-sum), cioè il caso in cui la funzione da minimizzare è costituita da una somma che tiene conto, eventualmente con pesi diversi, di tutti gli utenti da soddisfare (cioè del caso medio);

(ii) *caso peggiore* (min-max), cioè il caso in cui la funzione da minimizzare tiene conto dell'utente in condizioni più sfavorevoli, quello a cui corrisponde il tempo di intervento massimo.

In questo secondo caso, per esempio per i problemi di localizzazione di servizi di emergenza, si tratta in pratica di "coprire" il territorio in esame con un insieme di punti (stazioni) per una di queste due situazioni, o varianti di esse:

(ii1) dato un numero p di stazioni, localizzarle in modo da rendere minimo il tempo di intervento δ_{max} nel caso più sfavorevole;

(ii2) dato un tempo di intervento δ oltre il quale l'intervento non risulterebbe più efficace, localizzare il numero minimo p_{min} di stazioni necessario per rispondere ad ogni chiamata in modo efficace.

Il criterio del caso peggiore pone quindi il problema nel filone dell'ottimizzazione combinatoria noto come *set covering*, per la cui risoluzione esistono numerosi metodi su grafo (Salkin, 1975), molti dei quali euristici: ciò a causa delle dimensioni spesso notevoli del problema e del fatto che in alcuni casi (per esempio le ambulanze) la localizzazione va periodicamente ridefinita. Su ciò si tornerà in 5.2.2.

Si può affermare quindi che le differenti caratteristiche dei problemi di localizzazione, soprattutto di quelli del settore pubblico, si esprimono attraverso modelli differenti nei vincoli e nella funzione obiettivo, nonché differenti algoritmi di risoluzione: ciò sarà l'argomento dei due paragrafi che seguono, dedicati alla formulazione del problema ed agli approcci di risoluzione.

Prima di concludere questo paragrafo è opportuno un breve accen-

no alle caratteristiche del problema della localizzazione dal punto di vista del processo decisionale.
Ciò significa essenzialmente due cose:
- l'esame dei fattori localizzativi principali,
- l'esame delle condizioni in cui avviene il processo decisionale.

Questa analisi è fatta allo scopo principale di consentire una valutazione della significatività dei modelli che saranno illustrati in seguito; essa è tratta prevalentemente da Bartezzaghi, Colorni e Palermo (1976), Zimmermann e Sovereign (1974).

La localizzazione è un processo decisionale con un orizzonte temporale lungo, rispetto al quale è necessario esaminare un elevato numero di fattori e valutare le conseguenze delle decisioni prese.

I principali *fattori localizzativi* sono

- fattori legati ai costi:	costi del trasporto distribuzione della forza lavoro disposizione delle fonti di approvvigionamento incentivi e/o sistemi di tassazione
- fattori legati alla domanda:	aree di mercato distribuzione spaziale della domanda rete di distribuzione
- fattori naturali:	servizi esterni accessibilità ai finanziamenti disponibilità di energia, terreni, ecc.
- fattori extraeconomici:	caratteristiche politiche, sociali, culturali condizioni e vincoli istituzionali.

Naturalmente, il ruolo che essi svolgono è diverso nei processi di localizzazione del settore privato (impresa) e pubblico (servizi).
Inoltre alcuni di essi sono rappresentabili abbastanza agevolmente per mezzo di un modello matematico, altri assai meno: in particolare, i fattori di costo entrano solitamente nella formulazione della funzione obiettivo del modello, gli altri (con maggiore o minore difficoltà) nei vincoli.

La rilevanza dei fattori localizzativi dipende dal tipo di produzione/servizio e dalle sue caratteristiche; inoltre può variare a seconda della fase del processo di decisione localizzativa. Infatti la complessità di tale decisione fa sì che in genere essa sia elaborata comparando le diverse alternative in fasi successive (anche se interagenti) che sono relative alla scelta dell'*area* di localizzazione, alla scelta della *località* all'interno di tale area ed infine alla scelta del *punto* specifico. In ognuna di queste fasi possono prevalere considerazioni su alcuni fattori piuttosto che su altri, in relazione al tipo di produzione/servizio: ad esempio, prevalgono i costi di trasporto e le aree di mercato a livello di scelta dell'area di localizzazione, la disponibilità di lavoro, di servizi e di economie esterne per la scelta della località, le infrastrutture e i fattori naturali per la scelta del punto.

Per quanto riguarda le *condizioni* in cui avviene il processo decisionale, una certa attenzione è stata dedicata alla definizione di schemi logico-interpretativi per i processi di localizzazione prevalentemente inerenti al settore privato.
In tali schemi si esamina da un lato il peso che i diversi fattori localizzativi hanno sulle scelte del decisore, dall'altro il contesto in cui avviene la decisione.
Per il primo aspetto, si possono distinguere casi di localizzazione
(A1) vincolata da uno o più fattori,
(A2) determinata da un fattore prevalente,
(A3) condizionata da molti fattori diversi.
Per il secondo aspetto, cioè i rapporti con l'ambiente in cui avviene la decisione, si possono avere casi di processo
(B1) di adattamento all'ambiente esistente (le scelte avvengono nell'ambito di dati politico-economici esterni e non modificabili),
(B2) subordinato da parametri esogeni (le scelte sono condizionate dal comportamento di altri decisori),
(B3) interdipendente (le scelte sono condizionate e condizionano altri processi decisionali),
(B4) indipendente e controllabile (le scelte sono in grado di influenzare le condizioni di insediamento),
(B5) pianificato (le decisioni realizzano condizioni per lo sviluppo di intere aree o settori).

Incrociando queste due classificazioni (Bartezzaghi, 1979) si ottiene una tipologia di situazioni abbastanza indicativa per valutare la significatività dei modelli, che è riportata in tab. 1.

	(B1)	(B2)	(B3)	(B4)	(B5)
(A1)			■	■	■
(A2)	x	x			
(A3)	x				

Tabella 1 Tipologia del processo di decisione e dei fattori localizzativi (le caselle col quadrato indicano combinazioni da escludere logicamente, quelle con la croce le combinazioni per cui allo stato attuale è più significativo l'uso dei modelli, le altre indicano situazioni di uso parziale dei modelli)

Si possono formulare alcune valutazioni e ipotesi.
Per la riga (A1) non è necessario il ricorso a modelli localizzativi in determinati casi; tuttavia, nei casi in cui risulti vincolata l'area di localizzazione può essere significativo il ricorso ad un modello per la scelta del punto di localizzazione (con un'opportuna precisazione dei fattori localizzativi a questo livello di analisi). Allo stato attuale l'uso dei modelli è significativo soprattutto per la riga (A2) e in particolare per i casi in cui siano rilevanti i "tradizionali" fattori localizzativi, come il costo di trasporto, la forza lavoro, le aree di mercato.
Lo sviluppo della modellistica, con la rimozione di ipotesi limitatrici e la possibilità di risolvere modelli più complessi, consente di trattare anche le situazioni della riga (A3) e di considerare fattori localizzativi più complessi (come le economie esterne, ecc.), ricorrendo eventualmente ad analisi preventive basate sulle tecniche dell'analisi regionale per la definizione di adeguate funzioni di costo e di sistemi di vincoli.
La colonna (B1) rappresenta i casi più tipici di applicazione dei modelli di programmazione matematica; in tali casi i parametri del modello sono determinati in modo esogeno (prezzi e domanda dei prodotti, costo e disponibilità dei fattori, ecc.). Nella colonna (B2) risulta significativo il caso di localizzazione condizionata da singoli fattori (per esempio il mercato di sbocco per le piccole aziende subfornitrici). Nella colonna (B3) emergono con maggiore evidenza le limitazioni degli attuali modelli, che assumono come esogeni tutti gli aspetti che per tali situazioni sono da conside-

rare invece endogeni al modello (una possibile utilizzazione dei modelli in questo caso è la simulazione, assumendo diverse ipotesi sul valore dei parametri). Nella colonna (B4) e soprattutto nella (B5) si ricorre a modelli più generali relativi all'assetto delle attività economiche sul territorio, sviluppati nell'ambito dell'economia spaziale e dei metodi di pianificazione regionale.

Nei paragrafi che seguono saranno esaminati vari tipi di modelli matematici per il problema della localizzazione, il cui utilizzo è direttamente proporzionale alla significatività nel rappresentare il reale processo di decisione.
L'uso di tali modelli costringe, di solito, ad una quantificazione abbastanza spinta dei vari aspetti del problema e non è, ovviamente, l'unico punto di vista utilizzabile. Ne esistono altri, che consentono un'analisi meno formale e un esame degli aspetti più qualitativi.

3. ANALISI DEL PROBLEMA

La produzione di articoli nel settore dei modelli di localizzazione è stata ed è tuttora molto vasta (anche se cominciano a emergere segni di una certa diminuzione).
Appare quindi necessario disporre di qualche criterio organico di interpretazione e valutazione del materiale esistente. Ciò sarà tentato in questo paragrafo, distinguendo tra:
- l'esame di alcune variabili tipologiche fondamentali,
- l'esame della struttura dei modelli per individuarne alcuni aspetti unificanti.

Il contenuto di questo paragrafo è tratto, in buona parte, da un precedente lavoro dell'autore (Bartezzaghi, Colorni e Palermo,1976).

3.1 I parametri fondamentali

Esporrò in questo elenco quelle che mi paiono essere le caratteristiche di un problema di localizzazione che ne consentono una classificazione. L'elenco è sommariamente commentato, il lettore interessato ad un maggiore approfondimento può riferirsi a Bartezzaghi, Colorni e Palermo (1976), Coelho (1981).

(a) *Spazio:* (a1) continuo (a11) metrica rettilinea
(a12) metrica euclidea
(a13) altri tipi di metrica

(a2) discreto

(b) *Tempo:* (b1) modello statico
(b2) modello dinamico (multiperiodale)

(c) *Settore:* (c1) privato
(c2) pubblico (c21) servizi ordinari
(c22) servizi di emergenza

(d) *Produzione:* (d1) monosettoriale
(d2) multisettoriale (d21) senza interdipendenze produttive
(d22) con interdipendenze produttive

(e) *Funzione obiettivo:* (e1) criterio dell'efficienza
(e2) criterio del caso peggiore
(e3) programmazione a molti obiettivi

(f) *Tipo di costo:* (f1) legato alla produzione
(f2) legato alla distribuzione (f21) trasporto a distanza
(f22) distribuzione locale

(g) *Forma delle funzioni di costo:* (g1) lineari
(g2) lineari con "carica fissa"
(g3) concave (lineari a tratti)

(h) *Domanda:* (h1) fissata (h11) divisibile
(h12) indivisibile
(h2) elastica (h21) con legge nota
(h22) stocastica

(i) *Capacità :* (i1) illimitata
(i2) limitata (i21) fissa
(i22) variabile

(l) *Numero di impianti:* (l1) fissato
(l2) da determinare

I parametri (a)-(d) descrivono maggiormente il problema, quelli (e)-(l) descrivono maggiormente il modello (in particolare (e)-(g) la funzione obiettivo, (h)-(l) i vincoli).
E' opportuno qualche commento.

Il caso (a1) (la localizzazione può avvenire in un qualsiasi punto del piano che rappresenta il territorio in esame) corrisponde storicamente alle prime formulazioni dei modelli: una recente rassegna è contenuta in Hansen e Thisse (1981). Di esso, e del relativo problema della *metrica* ci occuperemo in 5.2.1.
Nonostante tale caso sembri il più generale, esso è stato progressivamente abbandonato a favore dei modelli (a2) di tipo discreto: ciò perché l'uso dei grafi consente di esprimere in modo assai più preciso le distanze, i tempi, le condizioni di viabilità corrispondenti alla rete di trasporto esistente e perché i modelli di tipo discreto tengono conto più facilmente di vincoli particolari (di natura geografica, amministrativa, di mercato) che circoscrivono a priori i punti candidati alla localizzazione; nel caso discreto la distanza tra due punti è costituita dal *cammino minimo* sul grafo che rappresenta la rete di trasporto.

Il caso (b1) è molto più trattato del caso (b2) il quale peraltro più che come problema dinamico vero e proprio (con variabili di stato che tengono conto delle decisioni precedenti) è risolto come problema di decisione con scelte da attuarsi in momenti diversi (modello multiperiodale), con il solo effetto di un aumentato numero delle variabili (Erlenkotter,1981, Van Roy e Erlenkotter,1982); I due casi (c), con le ulteriori suddivisioni di quest'ultimo (ed il tipo di condizioni poste dai servizi di emergenza), sono già stati discussi nel precedente punto e non saranno perciò ulteriormente commentati.
Il caso (d1) è quello su cui esistono la maggior parte dei contributi: è però da notare che il caso (d21) rientra in pratica in (d1), a parte l'aumentato numero delle variabili; diversa invece la situazione del caso (d22), per il quale la difficoltà di modellizzazione e quelle computazionali rendono rari i contributi significativi (Scherer et al., 1975).

La distinzione (e) tra i vari tipi di funzione obiettivo, esposta già nei punti (i) e (ii) del paragrafo precedente, è trattata con dettaglio in Coelho (1981) e in alcuni articoli di ReVelle (ReVelle, Cohon e Shobrys, 1981) e Nijkamp (Nijkamp e Rietveld, 1980), e sarà esaminata in particolare in 5.2.

I casi (f) e (g) si riferiscono entrambi alle funzioni di costo che compaiono nella funzione obiettivo; la distinzione (f) trattata anche in Eilon, Watson-Gandy e Christofides (1971) è relativa alla natura dei costi (non sempre tutti presenti nei vari problemi di localizzazione che tratteremo), mentre la (g) si riferisce alla loro forma; in particolare il caso (g1) esprime l'ipotesi di rendimenti costanti, il caso (g2) (una componente di costo fisso indipendente dal livello produttivo dell'impianto o servizio) ed il caso (g3) (in cui normalmente la funzione lineare a tratti approssima, con l'uso della programmazione separabile, una funzione concava) esprimono la realistica ipotesi di rendimenti crescenti. Le varie funzioni di costo sono mostrate in fig. 2.

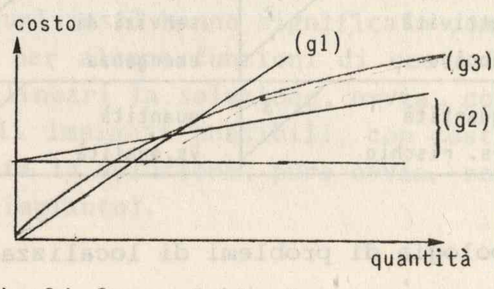


Figura 2 Le principali forme delle funzioni di costo

Le classificazioni (h), (i), (l) si riferiscono ai vincoli del problema.
Relativamente al parametro costituito dalla domanda di beni o servizio il caso (h11) è il più consueto; qualche articolo recente si è occupato del caso (h2) Sheppard (1981).
Il parametro (i) può esprimere in generale l'insieme di condizioni e di vincoli imposti dalla tecnologia produttiva del bene o servizio che si vuole localizzare. Il caso (i1) rende praticamente inutile la condizione (h12) di indivisibilità della domanda (infatti ogni utente si può rifornire per l'intero ammontare della sua domanda presso l'impianto a lui più favorevole). Il caso (i22) richiede normalmente che la capacità vari in modo discreto, avendo a disposizione un numero finito di valori possibili.
Il parametro (l) è assai importante dal punto di vista delle metodologie di risoluzione. Il caso (l1) presuppone che i costi di impianto siano spazialmente indifferenziati (e quindi che conti soltanto il numero degli impianti da realizzare): qualora ciò non sia realistico, la condizione (l1) viene sostituita da un vincolo complessivo sul budget.

Alcuni aspetti significativi derivanti dalla combinazione di funzioni obiettivo e condizioni di vincolo sopra esposte saranno illustrati in 3.2. Qui invece, è opportuno evidenziare le principali *tipologie di problemi di localizzazione* alla luce delle classificazioni precedenti.

Una prima tipologia si ottiene dall'incrocio di (c) (settore) ed (e) (funzione obiettivo).
La situazione è presentata nella tab. 2.

f.obiettivo \ settore	privato	pubblico
efficienza	1 impianti e magazzini	4 servizi ordinari
caso peggiore	2 attività nocive	5 servizi di emergenza
molti obiettivi	3 quantità vs. rischio	6 quantità vs.qualità

Tabella 2 Una tipologia di problemi di localizzazione

Nella tabella compaiono, accanto ad ogni caso, alcune indicazioni che identificano la o le principali applicazioni in cui tale caso è significativo (ReVelle, Marks e Liebman, 1970). I sei modelli, tuttavia, hanno un diverso grado di significatività: i casi 2 e 3 infatti si riscontrano raramente in letteratura, mentre i casi 1 e 4 sono quelli più largamente trattati.
Nel caso 1 la struttura pubblica a volte interviene per influenzare la localizzazione industriale nel settore privato attraverso leggi (cioè vincoli del problema) e/o incentivi (cioè componenti della funzione obiettivo).

Una seconda tipologia, più orientata agli aspetti matematici ed ai metodi di risoluzione, si ottiene incrociando i parametri spazio (á), numero di impianti (l), capacità (i) (in particolare, considerando i casi (il) e (i21) di quest'ultimo parametro).
La fig. 3 mostra una rappresentazione astratta dei modelli che ne derivano.

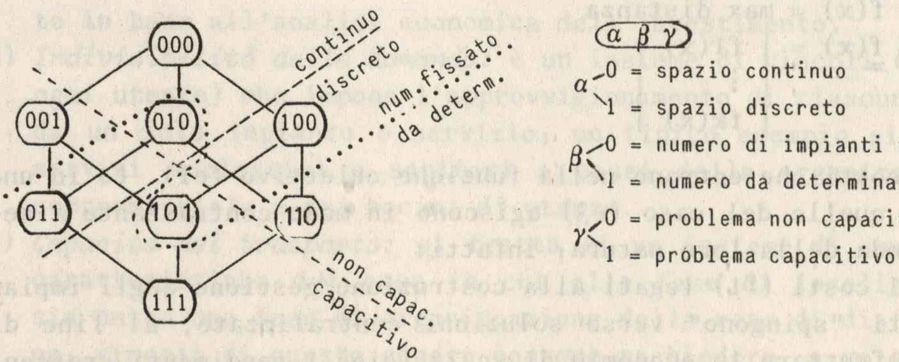


Figura 3 La rappresentazione (con variabili binarie) di una tipologia di problemi di localizzazione

Anche in questo caso alcuni nodi del grafo sono più significativi di altri: per esempio, le combinazioni 000 e 111 sono tra le più studiate (come si vedrà in dettaglio nel paragrafo 5). Si noti poi che le combinazioni con $\beta = 0$ e $\gamma = 1$ (α qualsiasi) possono risultare prive di senso qualora la capacità degli impianti e il loro numero siano troppo bassi, mentre le combinazioni con $\beta = 1$ e $\gamma = 0$ (ancora α qualsiasi) hanno significato come problemi di ottimizzazione solo per alcune funzioni di costo (per esempio, con costi di impianto lineari la soluzione, ovvia, consiste nell'aprire sempre tutti gli impianti possibili, con costi di impianto con carica fissa elevata la soluzione, pure ovvia, consiste nell'aprire sempre un solo impianto).

Ovviamente è possibile mettere in luce altri parametri e di conseguenza altre tipologie (anche se meno rilevanti); ritengo però più significativo passare all'esame della struttura dei modelli di localizzazione.

3.2 <u>La struttura del modello</u>

I modelli che stiamo esaminando sono modelli decisionali di programmazione matematica; in essi pertanto compaiono sempre una (o più) funzioni obiettivo e un insieme di vincoli.

Della funzione obiettivo si è già parlato a sufficienza nei paragrafi precedenti. Aggiungeremo qui soltanto due cose.

(I) Le tre formulazioni (e) si esprimono matematicamente minimizzando funzioni del tipo

(e1) f(x) = somma costi

(e2) f(x) = max distanza

(e3) $\underline{\underline{f}}(x) = \begin{vmatrix} f1(x) \\ \vdots \\ fk(x) \end{vmatrix}$

(II) I costi che entrano nella funzione obiettivo (e1) (o in una di quelle del caso (e3) agiscono in modo contrastante a seconda della loro natura; infatti:

- i costi (f1) legati alla costruzione/gestione degli impianti "spingono" verso soluzioni centralizzate, al fine di sfruttare le economie di scala (cioè i rendimenti crescenti dei casi (g2) e (g3);
- i costi (f2) legati alla distribuzione (in particolare i costi (f21) del trasporto a distanza) "spingono" verso soluzioni decentralizzate, al fine di favorire gli utenti riducendo i costi (o le distanze o i tempi) medi di trasporto;
- esistono inoltre costi indipendenti sia dalla localizzazione che dal trasporto, i quali non entrano nel processo di ottimizzazione pur facendo parte del problema (possono essere considerati come un termine costante di esso).

L'esame dei vincoli è condotto allo scopo di classificarne i principali, che sono i seguenti.

(1) *Soddisfacimento della domanda:* si tratta di un insieme di vincoli (ce n'è uno per ogni utente) sempre presenti, sia nei pro

blemi di produzione/distribuzione del settore privato che in quelli di dimensionamento/gestione di servizi pubblici.

(2) *Vincoli tecnologici:* si tratta di condizioni di natura differente, che esprimono il modo di funzionamento degli impianti o servizi che si vogliono localizzare; quelli più spesso presenti sono i vincoli di *capacità*, ma esistono a volte anche condizioni di interdipendenza produttiva nel caso di più prodotti (cfr. con i punti (d) e (i) in 3.1).

(3) *Numero di impianti:* si tratta di un vincolo che solitamente compare in problemi di localizzazione di strutture decentrate (magazzini, impianti secondari, unità di servizi pubblici); solitamente il numero di impianti è fissato in base a considerazioni organizzativo-gestionali e/o amministrativo-territoriali.

(4) *Vincolo di budget:* anche in questo caso si tratta generalmente di un vincolo unico, relativo al capitale disponibile per la realizzazione di nuovi impianti/servizi, solitamente fissato in base all'analisi economica dell'investimento.

(5) *Indivisibilità della domanda:* è un insieme di vincoli (uno per ogni utente) che impone l'approvvigionamento di ciascun utente da un solo impianto o servizio; un tipico esempio si ha nei servizi scolastici o sanitari a causa della organizzazione comprensoriale e dei bacini di utenza.

(6) *Capacità del trasporto:* si tratta di un insieme di condizioni caratteristiche del caso in cui alla fase di localizzazione sia unita una fase di organizzazione della rete di distribuzione; vincoli di questo genere possono richiedere, a volte, l'esame di problemi di ottimizzazione combinatoria.

(7) *Vincoli di assegnamento e "side constraints"* (Spielberg, 1969): si tratta di vincoli che precludono o impongono gli approvvigionamenti da determinate sorgenti e/o la distribuzione a determinati utenti, nonché di condizioni di mutua esclusione o di selezione congiunta di alcune alternative: sono solitamente dovuti a ragioni di accessibilità, di costo, di pianificazione del servizio e così via.

Esisono poi naturalmente anche altri vincoli, più specifici, che variano da caso a caso.

E' ora possibile combinare i principali tipi di funzioni obiettivo con i principali vincoli sopra citati, al fine di mostrare alcuni effetti derivanti dalla struttura dei modelli.
E' ciò che è fatto dalla tab. 3.

f.obiettivo / vincoli	min sum (1)	min sum (2)	min max	molti obiettivi
1. domanda	x	x	x	x
2. capacità	(x)	x		(x)
3. numero	x	(x)	x	(x)
4. budget	(x)			
5. indivisibilità			x	
6. trasporto				
7. assegnamento			x	(x)

(1) rendimenti costanti (costi lineari)

(2) rendimenti crescenti (costi con carica fissa o concavi)

Tabella 3 Struttura dei modelli di localizzazione (funzione obiettivo e principali vincoli)

Esamineremo la tabella per colonne. Prima però è opportuno mettere in luce alcuni aspetti generali.

(a) Il vincolo di soddisfacimento della domanda, in una forma o in un'altra, compare sempre.

(b) I vincoli (3) sul numero di impianti e (4) sul budget disponibile sono, di fatto, in alternativa; la presenza di entrambi può rendere il problema non ammissibile.

(c) Il vincolo (5) di indivisibilità della domanda è stringente solo in presenza del vincolo (2) di capacità; in caso contrario è automaticamente verificato.

(d) Il vincolo (2) di capacità può non essere compatibile con il vincolo (3) o (4) che limita il numero di impianti da realizzare.

(e) Alcune condizioni, in particolare la (6) sulla capacità del trasporto e la (7) di assegnamento, non sono caratteristiche di un tipo di funzione obiettivo piuttosto che un altro: la loro presenza aumenta, a volte in maniera rilevante, lo sforzo computazionale.

La prima colonna corrisponde all'uso del criterio dell'efficienza nel caso di funzioni di costo con rendimenti costanti. Il vincolo di capacità può esserci o meno (in caso di costi indifferenziati spazialmente esso è inutile, poiché molti impianti piccoli equivalgono a uno grande);esiste quasi sempre la condizione (3) (in caso contrario la eventuale presenza di costi di trasporto spingerebbe all'apertura di tutti gli impianti possibili), mentre le condizioni (5), (6), (7) non sono caratterizzanti.

La seconda colonna esprime il criterio dell'efficienza nel caso di funzioni con rendimenti crescenti. Il vincolo (3) sul numero di impianti agisce concordemente alla funzione obiettivo (limitando la proliferazione di piccoli impianti), mentre il vincolo (4) è, di norma, superfluo. Il vincolo (2) è spesso presente, poiché se no in caso di costi di impianto elevati la soluzione finale tenderebbe ad aprire un unico grosso impianto per sfruttare al massimo le economie di scala; i vincoli (5), (6), (7) non sono caratterizzanti.

La terza colonna corrisponde all'uso del criterio del caso peggiore. Normalmente è fissato il numero di impianti; possono spesso darsi condizioni di assegnamento (corrispondenti all'esclusione di alcune configurazioni del grafo che rappresenta la rete). L'indivisibilità della domanda (che esiste quasi sempre essendo questi problemi strettamente legati a quelli di zonizzazione) è soddisfatta dall'assenza di vincoli di capacità.

La quarta colonna, infine, esprime la presenza di criteri diversi in contrasto tra loro. A seconda dei differenti criteri adottati possono essere presenti o meno le condizioni (2) sulla capacità e (3) sul numero degli impianti: questi due tipi di vincolo agiscono in maniera contrastante, poiché il (2) (maggiormente legato agli aspetti quantitativi dei costi) tende a far proliferare gli impianti ed il (3) (maggiormente legato agli aspetti qualitativi del servizio) tende invece ad abbassarne il numero. Possono essere presenti inoltre condizioni di assegnamento, legate alla presenza tra gli obiettivi del criterio del caso peggiore.

Riassumendo, è possibile, pur con quel tanto di schematismo che queste operazioni impongono, mostrare alcune formulazioni-tipo per i problemi di localizzazione, esprimendone funzione obiettivo e vincoli in un numero limitato di combinazioni (ciò non esclude, evidentemente, la presenza di casi più specifici e di formulazioni più articolate): è quanto sarà fatto nel paragrafo 5.

La seconda colonna esprime il criterio dell'efficienza nel caso di funzioni con rendimenti crescenti. Il vincolo (3) sul numero di impianti agisce concordemente alla funzione obiettivo (limitando la proliferazione di piccoli impianti), mentre il vincolo (4) è, di norma, superfluo. Il vincolo (2) è spesso presente, poichè se ne in caso di costi di impianto elevati la soluzione finale tenderebbe ad aprire un unico grosso impianto per sfruttare al massimo le economie di scala; i vincoli (5), (6), (7) non sono caratterizzanti.

La terza colonna corrisponde all'uso del criterio del caso peggiore. Normalmente è fissato il numero di impianti; possono spesso darsi condizioni di assegnamento (corrispondenti all'esclusione di alcune configurazioni del grafo che rappresenta la rete). L'indivisibilità della domanda (che esiste quasi sempre essendo questi problemi strettamente legati a quelli di zonizzazione) è soddisfatta dall'assenza di vincoli di capacità.

La quarta colonna, infine, esprime la presenza di criteri diversi in contrasto tra loro. A seconda dei differenti criteri adottati possono essere presenti o meno le condizioni (2) sulla capacità e (3) sul numero degli impianti: questi due tipi di vincolo agiscono in maniera contrastante, poichè il (2) (maggiormente legato agli aspetti quantitativi dei costi) tende a far proliferare gli impianti ed il (3) (maggiormente legato agli aspetti qualitativi del servizio) tende invece ad abbassarne il numero. Possono essere presenti inoltre condizioni di assegnamento, legate alla presenza tra gli obiettivi del criterio del caso peggiore.

Riassumendo, è possibile, pur con qualche tentativo di schematismo, che queste operazioni [illegible] alcune formulazioni-tipo [illegible] i problemi di localizzazione [illegible] funzione obiettivo e vincoli [illegible] numero limitato di combinazioni (ciò non esclude [illegible] evidentemente, la presenza di [illegible] specifiche [illegible] formulazioni più articolate [illegible] sarà fatto nel [illegible]

4. METODI DI RISOLUZIONE

Questo paragrafo intende fornire una breve rassegna dei principali metodi che si adottano per risolvere i problemi di localizzazione: presuppone quindi una qualche conoscenza delle tecniche della programmazione matematica e dell'ottimizzazione combinatoria. Esso precede e non segue il paragrafo 5 (rassegna dei modelli di localizzazione) perché mi è sembrato più utile disporre già di informazioni sugli algoritmi di risoluzione, allorché si affronteranno i diversi tipi di modelli.

Un problema di localizzazione di p impianti su una rete che comprenda n utenti, ciascuno dei quali possa essere considerato un punto candidato per la localizzazione, ha $\binom{n}{p}$ possibili soluzioni: se n è un numero medio-grande (basta un centinaio) e p supera le poche unità, tale valore è molto elevato.
Questo fatto pone due problemi:
- le dimensioni critiche di un algoritmo,
- l'uso di metodi euristici nella risoluzione.

Il problema della localizzazione è, di norma (*), un problema decisionale NP-completo (Garey e Johnson, 1979); la definizione di un tale tipo di problema , tipico della ottimizzazione combinatoria è dovuta a Cook e a Karp (1972) ed è la seguente:

un problema decisionale π appartiene alla classe dei problemi NP-completi se

(1) $\pi \in NP$, cioè il problema π può essere risolto in tempo polinomiale da un algoritmo non deterministico,

(2) π' è equivalente a π per tutti i problemi decisionali $\pi' \in NP$, cioè è definibile una trasformazione in tempo polinomiale che riduce π' a π.

In sostanza un problema di ottimizzazione combinatoria di questo tipo non è risolubile, almeno allo stato attuale delle conoscenze, in tempo polinomiale cioè in un tempo misurato da una fun-

---

(*) L'affermazione non è sempre valida: per esempio, se il grafo è un albero ed il problema è del tipo p-mediana (cfr.: 5.2.2), ciò non è vero.

zione che sia un polinomio di qualsiasi grado delle dimensioni del problema (*). Ciò significa che le dimensioni critiche, cioè quelle dimensioni al di là delle quali il tempo di risoluzione diviene esplosivo, sono relativamente basse.
Questo fatto pone con evidenza la necessità di usare, in molti casi, metodi di risoluzione euristici e di "accontentarsi" di ottenere una buona soluzione (non la ottima) purché in tempi ragionevoli. E infatti nel settore della localizzazione sono stati proposti numerosi metodi di questo tipo.

Le principali tecniche di risoluzione dei problemi di localizzazione sono riassunte nella seguente tabella.

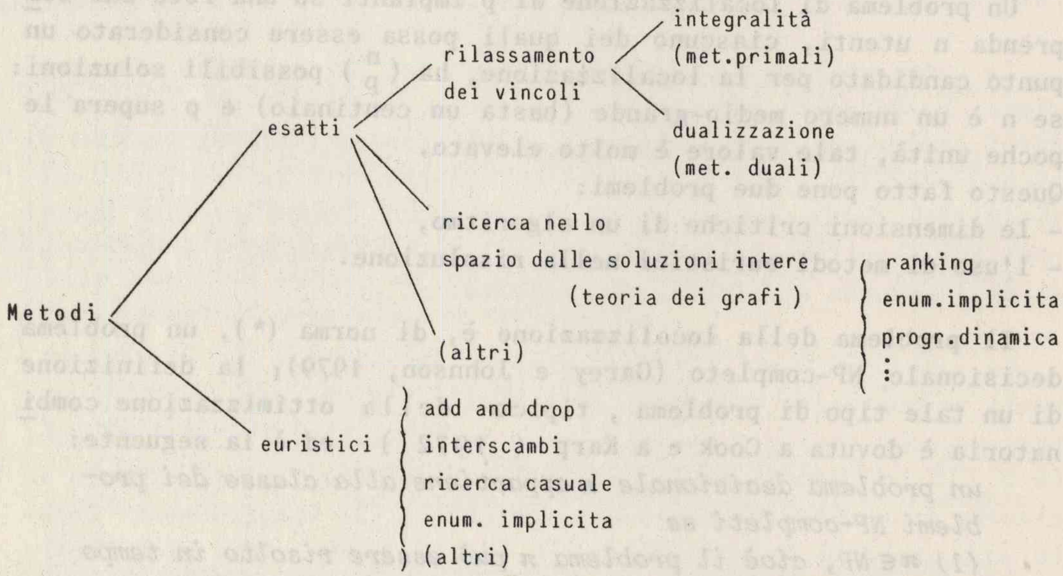


Tabella 4 Metodi di risoluzione dei problemi di localizzazione

Ne spiegherò brevemente le caratteristiche, cominciando dai metodi esatti. I metodi di *rilassamento* riformulano il problema dato in modo da ottenere un problema associato più facilmente risolubile: naturalmente devono essere poste in atto alcune attenzioni affinché la soluzione del problema associato lo sia anche per il problema di partenza.

(*) In Garey e Johnson (1979) è mostrata una tabella che confronta tra loro funzioni che esprimono la complessità computazionale di un algoritmo: da essa si vede che, se per esempio la dimensione del problema è $n=60$, algoritmi di complessità polinomiale come $O(n^5)$ lo risolvono in *13 minuti*, mentre algoritmi di complessità esponenziale come $O(2^n)$ ci metterebbero *366 secoli* di calcolatore (ancora peggio si comportano algoritmi di complessità $O(n!)$ fattoriale).

In particolare, un primo gruppo di algoritmi procede rilassando, cioè ignorando, le *condizioni di integralità* di alcune variabili ed ottenendo così un problema di programmazione lineare (in qualche caso di programmazione non lineare).
Un esempio classico di questo modo di procedere è fornito dal metodo di Efroymson e Ray (1966) per risolvere il problema che sarà esposto in 5.3, cioè un caso con costi di trasporto lineari, costi di impianto con carica fissa e senza vincoli di capacità. La struttura è quella tipica dei metodi di *branch and bound*(*).
Il principale vantaggio di questi metodi è che il rilassamento dei vincoli di integralità consente di ottenere problemi per i quali esistono algoritmi molto potenti e veloci (per esempio il simplesso o gli algoritmi di trasporto).

Un secondo gruppo di algoritmi di rilassamento è basato sulle procedure di *dualizzazione* e sull'uso della lagrangiana: si tratta di inserire alcuni vincoli, ciascuno moltiplicato per suo opportuno coefficiente (detto moltiplicatore del vincolo o variabile duale), nella funzione obiettivo, costruendo così un problema meno vincolato. Un esempio assai efficace di questo modo di procedere è fornito da Erlenkotter (1978).
I principali vantaggi sono due e consistono da un lato nella possibilità di sostituire alla risoluzione di un problema complesso quella di una serie di problemi più semplici, dall'altro nella possibilità di separare le parti del problema iniziale che interagivano tramite i vincoli dualizzati: si veda, per questo aspetto, quanto esposto in Nijkamp e Rietveld (1980) e Haimes (1977), per il caso di programmazione a molti obiettivi e a molti livelli.

(*) Le variabili binarie y_i (i = 1,...,m, essendo m il numero di nodi del grafo candidati alla localizzazione) sono quelle che caratterizzano i nodi dell'albero di branch. In ciascun nodo, infatti, vi sono alcune variabili y_i fissate (cui, cioè, è assegnato il valore intero 0 o 1) e le rimanenti sono libere (ad esse, cioè, è possibile assegnare un valore qualsiasi compreso tra 0 e 1): il problema corrispondente ad un nodo dell'albero risulta così un programma lineare. Inoltre, in virtù di una proprietà esposta in Efroymson e Ray (1956), la soluzione del programma lineare è ottenuta facilmente eliminando completamente le variabili y_i dal problema.

Un approccio differente è quello della *ricerca nello spazio delle soluzioni intere* del problema. Esso deriva dal fatto che in un problema di localizzazione (ad eccezione del caso continuo che sarà esposto in 5.2.1) sono sempre presenti alcune variabili discrete, che possono cioè assumere solo un numero finito di valori: ciò consente di formulare il problema in termini di ottimizzazione combinatoria, studiandone le caratteristiche nello spazio delle soluzioni (che sono in numero finito).

Ci sono alcune varianti di questo approccio e alcuni metodi diversi. Uno di essi consiste nell'esaminare le soluzioni attraverso una procedura di *ranking* che le ordina secondo un opportuno criterio (Murty, 1968, Gray, 1971, Bartezzaghi, Colorni e Palermo, 1981). In particolare, in Bartezzaghi, Colorni e Palermo (1981), è esposto un algoritmo di ranking per risolvere il problema di cui in 5.4 (costi di trasporto e di impianto, vincoli di capacità) basato sull'ordinamento dei costi fissi di impianto e sulla generazione di soluzioni "adiacenti" a quelle già esaminate in un albero di ricerca; un test basato su una stima per eccesso dei costi consente di bloccare l'algoritmo, esaminando solo una piccola parte delle possibili soluzioni.
Il principale vantaggio di metodi di ricerca nello spazio delle soluzioni intere è di poter disporre in ogni istante del procedimento di una soluzione ammissibile per il problema (cosa che invece non accade con i metodi di rilassamento), più o meno buona a seconda dell'approfondimento a cui è giunta la ricerca.
Molto spesso, pertanto, metodi di questo genere danno origine a procedure più semplificate e veloci (ma basate sulle stesse idee) di tipo euristico.

I metodi euristici nella risoluzione di problemi di localizzazione sono numerosissimi, a partire dall'inizio degli anni '60: uno dei primi e dei più famosi fu quello di Kuehn e Hamburger (1963) per il problema capacitivo con carica fissa. In una certa misura, ogni metodo appare diverso dagli altri e costruito "ad hoc" per sfruttare le caratteristiche del problema; è però possibile distinguere alcuni filoni.

I metodi del tipo *add and drop* partono da una soluzione ammissibile iniziale, cioè da un insieme di impianti aperti, e perturbano questa soluzione aggiungendo o togliendo impianti: in pratica si passa da un vettore di 0 e 1 (corrispondente allo stato degli im-

pianti) ad uno adiacente nello spazio delle variabili binarie, poi ad un altro e così via migliorando di volta in volta la funzione obiettivo. Quando non è più possibile migliorare, l'algoritmo si arresta e l'ultima soluzione ottenuta è assunta come soluzione finale.
Algoritmi di questo genere risentono molto della fase di inizializzazione (cioè la soluzione finale dipende fortemente dalla soluzione di partenza): in particolare ve ne sono alcuni che iniziano aprendo il massimo numero possibile di impianti (ove questo non sia fissato), altri che partono dalla situazione opposta (nessun impianto aperto), altri da situazioni intermedie. Sono usati essenzialmente per problemi di tipo discreto (cioè su grafo), con costi di impianto concavi o con carica fissa.
Due esempi classici di questo modo di procedere sono Kuehn e Hamburger (1963), Manne (1964).

Un altro gruppo di metodi euristici, che chiameremo di *interscambio*, si basa sulla differenza tra la fase di localizzazione e quella di allocazione degli utenti agli impianti.
Si determina una soluzione ammissibile iniziale e poi si procede ad allocare in modo ottimo gli utenti ai vari impianti aperti; questa fase (la allocazione) determina una suddivisione del territorio in zone, ciascuna gravitante su un impianto; sulla base di tale suddivisione viene calcolata una nuova soluzione, a cui segue una nuova fase di allocazione e così via. L'algoritmo termina, in genere, quando la fase di allocazione non muta la suddivisione in zone della iterazione precedente.
Anche questi metodi risentono della scelta della soluzione iniziale; essi differiscono tra loro per il modo in cui viene effettuata tale scelta (ed eventualmente la allocazione). Sono usati fondamentalmente nella risoluzione dei problemi con numero di impianti fissato, sia nello spazio continuo che nello spazio discreto.
Alcuni esempi abbastanza noti sono esposti in Maranzana (1964)e Miehle (1958).

Vale la pena di segnalare un altro gruppo di metodi euristici, quelli detti di *ricerca casuale*, perché si tratta di un tipo di approccio che ha avuto recente sviluppo, come tutto l'insieme dei metodi di ottimizzazione stocastica.
L'idea fondamentale è quella di esplorare alcune soluzioni del problema, ottenute con una procedura di "estrazione" casuale dall'in-

sieme delle soluzioni ammissibili, ricavando da esse informazioni atte a orientare la ricerca successiva, cioè l'esplorazione di nuove soluzioni ottenute con procedura casuale; naturalmente è necessario prevedere un limite massimo alle estrazioni casuali, nonché alcuni metodi di ricerca che permettano di "addensare" la ricerca di soluzioni verso le zone più promettenti, cioè verso le soluzioni di minimo costo (metodi di clustering).
Algoritmi di questo genere risentono meno di altri della fase di inizializzazione e possono, in teoria, essere usati per qualsiasi tipo di problema di localizzazione (continuo e discreto, capacitivo e non, con numero di impianti fissato e non, ecc.): in alcuni casi sono anche definiti degli indicatori che consentono di stabilire la vicinanza, in probabilità, della soluzione trovata alla soluzione ottima.
Un esempio di questo genere si ha in Camerini, Colorni e Maffioli (1983).

Sia gli algoritmi esatti che quelli euristici sono, più o meno fortemente, condizionati dai *dati* dei problemi su cui si trovano ad operare.
Ciò è relativo non soltanto alla quantità dei dati (cioè alla dimensione del problema) ma anche alla loro struttura: per esempio, vi sono algoritmi che, a parità di dimensioni del problema, funzionano bene per problemi nei quali siano prevalenti i costi legati al trasporto, altri che funzionano meglio con prevalenti costi di impianto, alcuni per problemi con valori dei dati uniformi tra loro, altri per dati con valori molto diversificati, e così via.
Questo aspetto è spesso ignorato nell'analisi dei metodi risolutivi, mentre dovrebbe essere indagato con attenzione proprio in relazione alle diverse tipologie dei problemi di localizzazione ed ai differenti settori della loro applicazione.
E' chiaro che il discorso sulla struttura dei dati e sulle sue implicazioni è diverso (anche se complementare) rispetto a quello sulla complessità computazionale esposto all'inizio di questo paragrafo: nell'esame della complessità di un algoritmo conta il comportamento di esso *nel caso peggiore*, mentre nell'indagine rispetto alla struttura dei dati conta il comportamento dell'algoritmo *nel caso medio*.
Su ciò torneremo nei paragrafi che seguono e nel prospettare alcune linee di avanzamento.

5. MODELLI DI LOCALIZZAZIONE

Descriveremo in questo paragrafo i modelli più rilevanti, raggruppandoli in classi di complessità crescente sia dal punto di vista delle situazioni rappresentate che da quello dello sforzo richiesto per la soluzione.
La descrizione riguarderà i principali algoritmi di risoluzione e gli eventuali aspetti computazionali documentati.
Prima verrà esposto (5.1) uno schema generale nel quale inserire i problemi, poi verranno analizzate (5.2-5.6) cinque classi che appaiono significative.

5.1 Uno schema di riferimento

Viene ora presentato un quadro articolato dalle differenti strutture dei modelli di localizzazione, già esposto in Bartezzaghi, Colorni e Palermo (1976) per quanto riguarda il settore privato e qui ampliato al settore pubblico.
Tale quadro presenta cinque livelli.

Al primo livello il fattore di localizzazione determinante è il *costo del trasporto*, assunto lineare: non esistono (o sono indifferenziati spazialmente, se il numero di impianti è fissato) costi di impianto.

Il secondo livello introduce *rendimenti non lineari* e/o "indivisibilità economiche" che rimuovono l'ipotesi di costi di impianto indifferenziati spazialmente: ciò determina la presenza nella funzione obiettivo di due fattori, uno (lineare) legato ai costi di trasporto, l'altro (con economie di scala) legato ai costi di impianto.

Al terzo livello sono introdotte "indivisibilità tecnologiche" che rimuovono l'ipotesi che la produzione sia perfettamente flessibile: ciò si esprime attraverso l'introduzione di vincoli, il principale dei quali è quello sulla *capacità* del singolo impianto.

A questi tre livelli di formulazione del problema se ne aggiungono altri due, relativi alla maggiore complessità che il problema presenta quando se ne esaminino le applicazioni al settore pubblico: in esso (si veda il paragrafo 2, punto (ß)) non è sempre definibile un comportamento razionale dell'utenza ed il confronto tra le varie alternative deve essere fatto tenendo conto anche di criteri differenti da quelli del puro costo.

Esiste quindi una formulazione di quarto livello che comprende nella funzione obiettivo anche termini di *utilità casuale* che rimucvono l'ipotesi di perfetta razionalità del sistema (ciò è sostanzialmente dovuto alla presenza di molti decisori singoli): il modello, del tutto analogo ai precedenti per quanto riguarda la struttura dei vincoli ma con termini stocastici nella funzione obiettivo, è poi ridotto ad un programma deterministico.

Il quinto livello, infine, comprende i problemi la cui formulazione e risoluzione avviene attraverso i metodi della programmazione a *molti obiettivi* : ciò corrisponde a rimuovere l'ipotesi di perfetta sostituibilità tra obiettivi di diversa natura.

Questi cinque livelli principali sono ovviamente articolati al loro interno per la presenza di vincoli ulteriori (si veda 3.2) e per le possibili combinazioni dei parametri fondamentali (3.1); tuttavia questa suddivisione, a grandi linee, mi sembra valere e corrisponde, tra l'altro, allo sviluppo storico della modellistica nel settore: essa è rappresentata sinteticamente nella fig. 5.
Ad ogni livello del problema corrisponde uno dei punti che seguono, da 5.2 a 5.6.

Livello 1	Localizzazione con soli costi di trasporto
Livello 2	Localizzazione con rendimenti crescenti
Livello 3	Localizzazione con vincoli tecnologici
Livello 4	Localizzazione con funzioni di utilità casuale
Livello 5	Localizzazione con obiettivi multipli

Tabella 5 Livelli di complessità crescente nella formulazione del problema di localizzazione

Al fine di rendere più agevole la lettura, definiamo ora tutte le variabilità e gli indici che compariranno nel seguito.
Si indicano con:

n = il numero degli utenti
j = l'indice del generico utente ($j=i,\ldots,n$),
m = il numero dei punti candidati alla localizzazione,
p = il numero fissato di impianti da localizzare,
i = l'indice del generico punto di localizzazione ($i=1,\ldots,m$, oppure $i=1,\ldots,p$, o anche $i=1,\ldots,n$ se gli impianti possono essere localizzati presso gli n utenti),

$\left.\begin{array}{l} x_j \\ y_j \end{array}\right\}$ = le coordinate dell'utente j nel caso di spazio continuo,

$\left.\begin{array}{l} \varkappa_i \\ \eta_i \end{array}\right\}$ = le coordinate dell'impianto i nel caso di spazio continuo,

d_{ij} (t_{ij}) = la distanza (tempo) minima tra l'impianto i e l'utente j (*),
a_{ij} (e_{ij}) = l'elemento di una matrice booleana di incidenza tra gli impianti e gli utenti (vale 1 se è possibile il collegamento tra l'impianto i e l'utente j, 0 viceversa),

c_{ij} = il costo unitario di trasporto tra l'impianto i e l'utente j,
x_{ij} = la quantità trasportata tra l'impianto i e l'utente j,
f_i = la funzione di costo (eventualmente costante) relativa ai costi di costruzione e/o di gestione dell'impianto i,
y_i = la variabile Booleana relativa all'impianto i (vale 1 se l'impianto è aperto, 0 viceversa),
δ_{ij} = la variabile Booleana di accoppiamento tra gli impianti e gli utenti (vale 1 se l'utente j è servito dall'impianto aperto i, 0 viceversa),
q_i = la capacità dell'impianto i,
w_j = la domanda dell'utente j.

(*) Ricordiamo che, se il problema è descritto attraverso un grafo, la distanza tra due punti è costituita dal cammino minimo tra i due relativi nodi del grafo (si veda il punto (a) in 3.1).

I problemi che saranno trattati nel seguito comportano un differente livello di approfondimento dell'uso dei modelli: mi sembra, d'altra parte, necessario riassumere in pochi punti gli aspetti salienti di tale approfondimento. Per questi motivi viene qui introdotto uno schema di valutazione che sarà usato in tutti i tipi di problemi che seguiranno.
La valutazione si articola in base a quattro parametri:
(a) *algoritmi* , cioè presenza (in numero e qualità) di metodi di risoluzione del problema sia esatti che euristici;
(b) *codici di calcolo* , cioè documentazione dell'esistenza di programmi specifici o derivati da programmi generali di ottimizzazione;
(c) *teoria*, cioè presenza di risultati teorici assestati e/o di un vero e proprio corpo teorico inerente al problema in esame;
(d) *complessità computazionale*, cioè studio delle proprietà teoriche degli algoritmi e confronto delle loro prestazioni.
L'ordine dei quattro parametri non è casuale ma corrisponde (storicamente e concettualmente) allo sviluppo e all'assestamento delle conoscenze nel settore: le indicazioni che se ne traggono (ovviamente qualitative) verranno riprese nel paragrafo 6.

5.2 <u>La localizzazione da soli costi di trasporto</u>

In questa parte viene descritto il primo livello di formulazione del problema di localizzazione.
Si tratta del caso più semplice, dal momento che vengono assunte le seguenti ipotesi:
(α) unico indicatore di preferenza dato dai costi,
(β) perfetta razionalità del decisore,
(γ) assenza di vincoli tecnologici
(δ) assenza (o indifferenza alla localizzazione) di costi di impianto.

In particolare l'ipotesi (γ) di non esistenza di vincoli sulla capacità degli impianti combinata con l'ipotesi (δ) di assenza di costi di impianto rende necessario, perché il problema abbia senso, che sia *fissato il numero di impianti da localizzare:* in caso contrario (con p libero), la soluzione che minimizza i costi di trasporto sarebbe sempre quella di localizzare un impianto presso ogni utente.

Esistono, per questo tipo di problema, numerosi esempi di applicazione sia nel settore pubblico che in quello privato, nonché numerosi metodi di risoluzione sia esatti che euristici. I principali lavori di rassegna nel settore sono di Handler e Mirchandani (1979), Eilon, Watson-Gandy e Christofides (1971), Hansen e Thisse (1981), Coelho (1981), Halpern e Maimon (1982).

I parametri fondamentali che definiscono il problema sono (vedi fig. 3):

- lo spazio < continuo / discreto
- la funzione obiettivo < criterio dell'efficienza / criterio del caso peggiore

nonché, per i problemi relativi al settore pubblico:

- il tipo di servizio < richiesto (che genera esternalità positive) / nocivo (che genera esternalità negative).

Esamineremo separatamente i due casi identificati dal parametro spaziale.

5.2.1 Il caso continuo

La formulazione, tratta principalmente da Hansen e Thisse (1981) ed Eilon, Watson-Gandy e Christofides (1971), è la seguente.
E' definita, nello spazio R^2, una *norma* $\| . \|$ che consente di calcolare la distanza d_{ij} tra due punti i e j dello spazio. In particolare si pone

$$d_{ij} = \| i - j \| = \left[|x_i - x_j|^h + |\eta_i - y_j|^h \right]^{1/h} \qquad (1)$$

che determina, al variare di h, i principali modi di definire la distanza. Infatti:

(i) se h = 1, si ha la cosiddetta *metrica rettilinea* (tipica, per esempio, delle città americane) in cui la distanza è data dalla somma tra le differenze delle ascisse e delle ordinate;

(ii) se h = 2, si ha la classica *metrica euclidea* (quella "in linea d'aria", tipica dello spazio isotropo) in cui la distanza è calcolata come radice della somma dei quadrati;

(iii) se $h = \infty$, si ha la cosiddetta *metrica infinita* (utilizzata, per esempio, con il criterio del caso peggiore) in cui il valore della distanza tra due punti è data dalla massima tra le differenze delle coordinate.

In fig.4 è rappresentato il comportamento delle tre diverse metriche, che possono essere analizzate dettagliatamente seguendo la bibliografia riportata in Hansen e Thisse (1981).

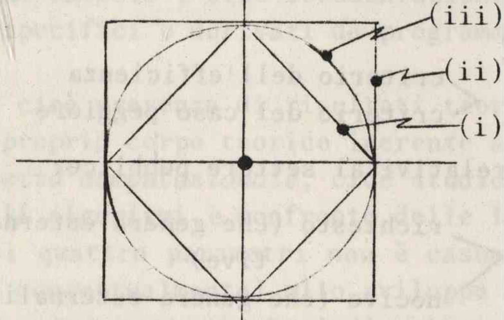


Figura 4 Gli insiemi di punti equidistanti dal punto centrale, (i) nella metrica rettilinea, (ii) nella metrica euclidea, (iii) nella metrica infinita

Le funzioni di costo sono legate al solo trasporto e crescono in modo continuo con la distanza impianto-utente se l'attività o il servizio da localizzare è *richiesto* , decrescono se è *nocivo*: il caso più frequente è quello di funzioni lineari, in cui il costo per l'utente j qualora egli si serva dell'impianto i è

$$C_j = w_j \, c_{ij} \, d_{ij} \qquad (2)$$

con un segno positivo o negativo a seconda che il tipo di servizio sia richiesto o nocivo.
La funzione obiettivo determina le due formulazioni che seguono, valide nel caso di servizi richiesti.

Il *problema di Weber* corrisponde all'uso del criterio dell'efficienza (cioè della minimizzazione della media delle distanze da percorrere); nel caso di costi lineari la sua formulazione è (Eilon, Watson-Gandy e Christofides, 1971):

$$\min \left(\sum_{1}^{p} {}_{i} \sum_{1}^{n} {}_{j} w_j \, c_{ij} \, d_{ij} \, \delta_{ij} \right) \tag{3.a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \\ \delta_{lj} = 1 \end{array} \right\} \quad (\forall i \neq l;\ l : \min_{i} d_{ij}) \quad (j = 1,\dots,n) \tag{3.b}$$

$$d_{ij} \quad \text{definita dalla (1)} \qquad (\forall i,\ j)\ , \tag{3.c}$$

mentre nel caso generale compariranno nella (3.a) le opportune funzioni crescenti di costo.

Il *problema di Rawls* corrisponde all'uso del criterio del caso peggiore (cioè della minimizzazione della massima distanza da percorrere); sempre nell'ipotesi di costi lineari la sua formulazione è(Hansen e Thisse, 1981):

$$\min \left(\max_{i=1,\dots,p;\ j=1,\dots n} w_j \, c_{ij} \, d_{ij} \, \delta_{ij} \right) \tag{4.a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \\ \delta_{lj} = 1 \end{array} \right\} \quad (\forall i \neq l,\ l: \min_{i} d_{ij}) \qquad (j = 1,\dots,n) \tag{4.b}$$

$$d_{ij} \quad \text{definita dalla (1)} \qquad (\forall i,\ j). \tag{4.c}$$

Naturalmente nel caso di servizi nocivi le funzioni di costo avranno segno opposto e quindi si otterrà (nell'ipotesi di costi lineari):

$$\max \left(\sum_{1}^{p} {}_{i} \ \sum_{1}^{n} {}_{j} w_j \, c_{ij} \, d_{ij} \ \delta_{ij} \right) \tag{3.a'}$$

$$\max \left(\min_{i=1,\dots,p;\ j=1,\dots,n} w_j \, c_{ij} \, d_{ij} \ \delta_{ij} \right) \tag{4.a'}$$

per i problemi di Weber e di Rawls rispettivamente.

Le variabili Booleane δ_{ij} esprimono l'accoppiamento tra gli impianti e gli utenti ($\delta_{ij} = 1$ significa che l'utente j è servito dall'impianto i).
Se p = 1 non servono,perché il problema risulta espresso nelle sole variabili $\varkappa$ e η (coordinate dell'impianto) che compaiono nella (1) e che definiscono le distanze d_j (j=1,...,n) dei vari utenti dall'impianto.

La presenza delle variabili δ_{ij}, nel caso di $p>1$, complica maggiormente le cose. Tuttavia l'ipotesi di *capacità illimitata*, tipica di questo genere di problemi, consente di determinarne il valore. Infatti, supponendo ogni impianto in grado di soddisfare qualsiasi domanda, l'utente j si serve certamente dell'impianto a lui più vicino: questo fatto è espresso dalle condizioni (3.b) (o dalle (4.b), che sono esattamente uguali), una per ogni utente.

Il problema (3) è il più noto: esso risale addirittura a Cavalieri e a Fermat (si veda Kuhn (1973) per un excursus storico), prima di essere reso famoso nella formulazione datane da Weber nel 1909 per il caso con p=1 e n=3. Il problema (4) ha a che fare con criteri di equità nella protezione degli utenti ed è assai usato, per esempio, nella localizzazione dei servizi di emergenza. Una bibliografia di entrambi (e delle relative versioni per i servizi nocivi) è esposta in Hansen e Thisse (1981).

La teoria, per questo tipo di problemi, ha avuto un continuo sviluppo, a partire dalla formulazione di Weber (1909).
Un primo tipo di contributi teorici si è avuto in relazione al problema di determinare l'insieme delle *soluzioni efficienti*, cioè i punti di R^2 non dominati da altri (*), insieme che non tiene conto dei costi di trasporto nè della domanda degli utenti : all'interno di esso si trova la soluzione ottima (questa, invece, dipendente dai costi c_{ij} e dalle domande w_j).
Altri contributi sono relativi alla definizione del caso vincolato (dal caso, cioè, in cui alcune regioni di R^2 non siano ammissibili): è del 1963 la definizione, dovuta a Goldman, del concetto di *visibilità* che contribuisce alla determinazione delle soluzioni efficienti per tale caso.
Infine altri risultati teorici riguardano la determinazione della soluzione ottima per alcuni particolari tipi di funzioni di costo.
Esaminiamo ora gli algoritmi di risoluzione distinguendo i due tipi di problemi (3) e (4).

(*) Nel caso di problema di Weber, un punto $l \in R^2$ è dominato da un altro punto $i \in R^2$ se risulta

$$d_{ij} \leqslant d_{lj} \qquad (j = 1,\dots,n)$$

essendo la disuguaglianza verificata in senso stretto da almeno un valore di j.

Per il *problema di Weber* i principali risultati sono i seguenti.

Nel caso di metrica rettilinea, in Chalmet, Francis e Kolen (1981) è proposto un algoritmo, la cui complessità computazionale è O (n log n), per il calcolo dell'insieme delle soluzioni efficienti. Per il calcolo della soluzione ottima, l'approccio più usato è del tipo che era stato definito di interscambio nel paragrafo 4. Esso è esatto, cioè fornisce la soluzione ottima, se p=1 mentre è euristico per p>1: la dimostrazione di ciò si trova in Eilon, Watson-Gandy e Christofides (1971), mentre in Colorni et al. (1979) è mostrato in dettaglio un algoritmo di questo tipo ed il relativo programma di calcolo, basati su una proposta di Miehle (1958). Lo schema a blocchi dell'algoritmo è mostrato in fig. 5.

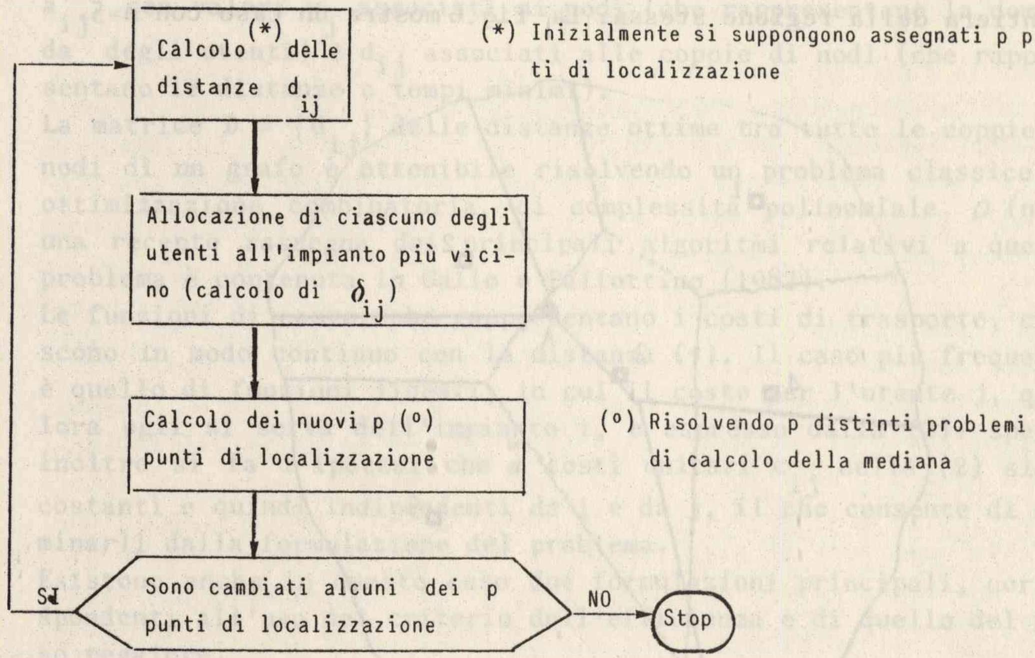


Figura 5 Il metodo euristico di Miehle per la localizzazione di p impianti (problema di Weber)

Altri metodi (esatti) sono basati su tecniche di branch and bound con successive partizioni di regioni del piano (Hansen e Thisse, 1981) e su tecniche di rilassamento lagrangiano (Scheafer e Hurter, 1974).
In generale i metodi di risoluzione di questo problema hanno complessità polinomiale in n.

Per il *problema di Rawls* i principali risultati sono i seguenti.
In caso di metrica euclidea, in Shamos e Hoey (1975) è descritto un algoritmo di complessità O(n log n) per la risoluzione esatta del problema con p=1 e $w_j=1$, $\forall_j$. Tale algoritmo partiziona il piano in un massimo di n aree: ciascuna area A_j (j=1,...,n) contiene i punti più lontani dall'utente j che da tutti gli altri utenti; l'algoritmo determina poi la soluzione ottima esaminando l'insieme dei punti di intersezione delle linee rette che dividono la regione.
Nel caso di localizzazione di un servizio nocivo, la partizione del piano è fatta in modo che ogni area A_j contenga i punti più vicini all'utente j che a tutti gli altri utenti e la soluzione ottima è cercata all'intersezione delle linee rette che dividono la regione nelle n aree o all'intersezione di tali linee con la frontiera della regione stessa. La fig.6 mostra un caso con n=5.

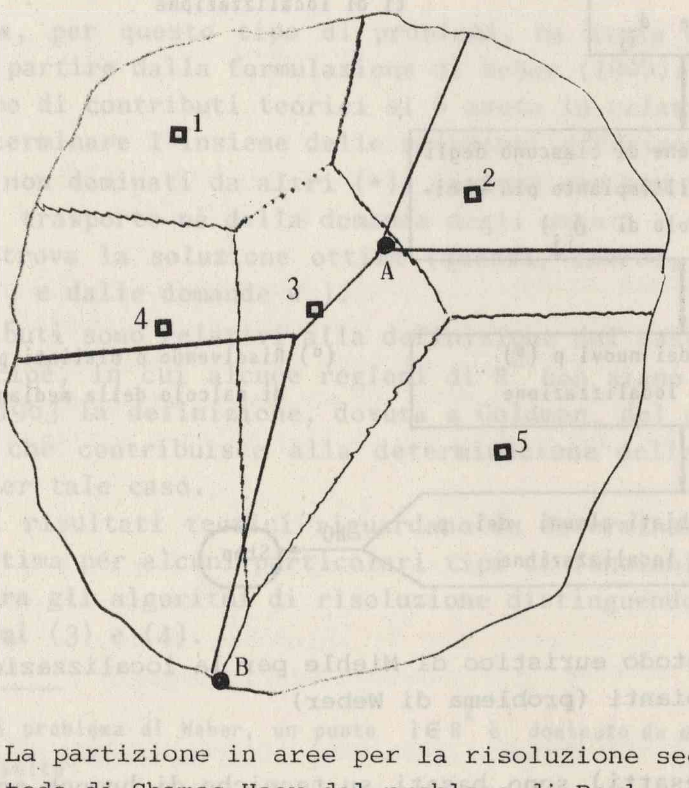


Figura 6 La partizione in aree per la risoluzione secondo il metodo di Shamos-Hoey del problema di Rawls, con n=5,p=1,w_j=1 (j=1,...,5):

—— = confini delle 4 aree contenenti i punti più lontani dall'utente j che da tutti gli altri utenti (nel caso di un servizio richiesto);

~~~~ = confini delle 5 aree contenenti i punti più vicini all'utente j che a tutti gli altri utenti (nel caso di un servizio nocivo);

Le soluzioni ottime sono il punto A per il primo caso, il punto B per il secondo.
~~~~

Altri metodi (esatti ed euristici) relativi al caso con domande w_j e valore di p qualsiasi si basano quasi tutti su considerazioni geometriche: per esempio Drezner e Wesolowsky (1980) propongono una procedura iterativa di tipo *add* che risolve il problema partendo dai 3 utenti più lontani dal baricentro e via via inserendo gli altri nel procedimento, se ciò è necessario.
Anche questi tipi di algoritmi hanno complessità polinomiale in n (Hansen e Thisse, 1981).

5.2.2 Il caso discreto

La formulazione, tratta principalmente da Handler e Mirchandani (1979) e da Garey e Johnson (1979), è la seguente.
E' dato un grafo G = (N,A) di n nodi collegati tra loro da archi a_{ij}, con valori w_j associati ai nodi (che rappresentano la domanda degli utenti) e d_{ij} associati alle coppie di nodi (che rappresentano le distanze o tempi minimi).
La matrice $D = \{d_{ij}\}$ delle distanze ottime tra tutte le coppie di nodi di un grafo è ottenibile risolvendo un problema classico di ottimizzazione combinatoria, di complessità polinomiale $O(n^3)$: una recente rassegna dei principali algoritmi relativi a questo problema è contenuta in Gallo e Pallottino (1982).
Le funzioni di costo, che rappresentano i costi di trasporto, crescono in modo continuo con la distanza (*). Il caso più frequente è quello di funzioni lineari, in cui il costo per l'utente j, qualora egli si serva dell'impianto i, è espresso dalla (2): spesso inoltre si fa l'ipotesi che i costi unitari c_{ij} nella (2) siano costanti e quindi indipendenti da i e da j, il che consente di eliminarli dalla formulazione del problema.
Esistono anche in questo caso due formulazioni principali, corrispondenti all'uso del criterio dell'efficienza e di quello del caso peggiore.

(*) Esporremo qui solo il caso di localizzazione di impianti o servizi richiesti, che è largamente il più trattato; il caso di servizi nocivi può, comunque, essere desunto con procedure analoghe a quelle usate nel problema di tipo continuo esposto in precedenza.

Il *problema delle p-mediane*, che è l'analogo del problema di Weber nel continuo, nel caso lineare si può formulare come segue ($c_{ij} = 1, \forall i,j$):

$$\min \left(\sum_{1}^{n} {}_i \sum_{1}^{n} {}_j \; w_j \, d_{ij} \, \delta_{ij} \right) \qquad (5.a)$$

$$\sum_{1}^{n} {}_i \; \delta_{ij} = 1 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (5.b)$$

$$\sum_{1}^{n} {}_i \; \delta_{ii} = p \qquad (5.c)$$

$$\sum_{1}^{n} {}_j \; \delta_{ij} \leqslant n \, \delta_{ii} \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (5.d)$$

$$\delta_{ij} = 0,1 \qquad (\forall i,j) \quad , \qquad (5.e)$$

in cui la funzione obiettivo (5.a) esprime i costi (lineari)di tra sporto, le n equazioni (5.b) impongono che ogni utente sia allocato ad un impianto, la condizione (5.c) richiede che gli impianti aperti siano esattamente p, le n disequazioni (5.d) impongono che sia no nulle tutte le variabili δ_{ij} della riga i-esima qualora sia nul la la variabile δ_{ii}, mentre se $\delta_{ii}=1$ sono ininfluenti.

La formulazione (5) del problema è fatta nell'ipotesi che i nodi candidati per la localizzazione siano tutti e soli gli n nodi corri spondenti agli utenti (che cioè risulti $d_{ii} = 0$ e che δ_{ii} assuma il significato di variabile di localizzazione relativa all'impianto del nodo i). Nell'ipotesi che i nodi candidati siano m ed appar tengano ad un insieme diverso, le sommatorie di indice i vanno modificate,come pure il significato di d_{ij} (d_{ii} può essere >0) e di δ_{ij}: una formulazione di questo caso si ha, per esempio, in Cornuejols,Fisher e Nemhauser (1977) ed è basata sull'uso delle varia bili di localizzazione y_i $(i=1,\ldots,m)$, con le condizioni

$$\sum_{1}^{m} {}_i \; y_i = p \qquad (5.c')$$

$$\delta_{ij} \leqslant y_i \qquad (i=1,\ldots,m; j=1,\ldots n). \qquad (5.d')$$

in sostituzione della (5.c) e (5.d) e con $y_i=0,1$ $(i=1,\ldots,m)$.

Il *problema dei p-centri*, che è l'analogo del problema di Rawls nel continuo, nel caso di costi lineari si può formulare come segue ($c_{ij} = 1, \forall i,j$)

$$\min \left(\max_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots n} w_j \, d_{ij} \, \delta_{ij} \right) \qquad (6.a)$$

$$\sum_{1i}^{n} \delta_{ij} = 1 \qquad (j=1,\dots,n) \qquad (6.b)$$

$$\sum_{1i}^{n} \delta_{ii} = p \qquad (6.c)$$

$$\sum_{1j}^{n} \delta_{ij} \leqslant n \, \delta_{ii} \qquad (i=1,\dots n) \qquad (6.d)$$

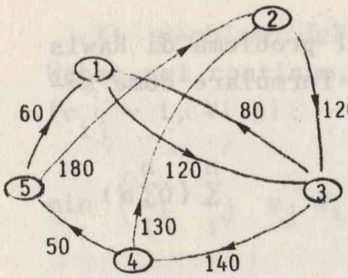
$$\delta_{ij} = 0,1 \qquad (\forall i,j) \;, \qquad (6.e)$$

e per esso valgono le stesse considerazioni fatte a proposito del problema delle p-mediane nel caso in cui i punti candidati non coincidono con gli n utenti.

La funzione obiettivo (6.a) non vale solo nel caso di servizi di emergenza: anche nella localizzazione di scuole, fermate di autobus e tram, biblioteche e altri servizi pubblici, conta la massima distanza della popolazione servita.

In fig. 7 è mostrato un esempio di grafo con $n = 5$ ($w_j=1$ per $j=1,\dots,5$) sul quale vengono risolti i problemi delle p-mediane e dei p-centri con p=2. Oltre al grafo con le distanze dirette, sono riportate la matrice $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$ di incidenza e la matrice $\underline{\underline{D}} = \{d_{ij}\}$ delle distanze minime. Poiché il grafo è orientato e la matrice $\underline{\underline{D}}$ non è simmetrica, saranno diverse le soluzioni nel caso di localizzazione di impianti in cui il trasporto avviene *dagli* impianti agli utenti e in quello di trasporto dagli utenti *agli* impianti. In figura è riportata la soluzione dei due problemi nel primo caso.

Nel problema delle p-mediane il valore ottimo della funzione obiettivo che si ottiene (nell'esempio è 260) rappresenta il costo totale del trasporto dagli impianti agli utenti: dividendo tale valore per il numero n di utenti si ha ovviamente il costo medio di utente (nell'esempio è 52) che può essere confrontato con il valore della funzione obiettivo del problema dei p-centri (nell'esempio è 120).



$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & \\ & 1 & 1 & & \\ 1 & & 1 & 1 & \\ & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 390 & 120 & 260 & 310 \\ 200 & 0 & 120 & 260 & 310 \\ 80 & 270 & 0 & 140 & 190 \\ 110 & 130 & 230 & 0 & 50 \\ 60 & 180 & 180 & 320 & 0 \end{bmatrix}$$

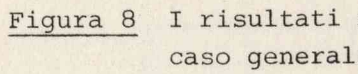
Figura 7 Soluzioni dei problemi (p=2):
- delle p-mediane, nodi 3 e 4 con funzione obiettivo pari a 260,
- dei p-centri, nodi 2 e 4 con funzione obiettivo pari a 120.

La formulazione di questo tipo di problemi discreti è molto più recente rispetto agli analoghi nel caso continuo e più recenti sono anche i principali risultati teorici dovuti ad Hakimi (1964, 1965). Egli ha mostrato sostanzialmente due fatti legati alla più *generale formulazione del problema*, che prevede la possibilità di localizzare non solo nei nodi del grafo ma anche lungo gli archi di esso:

(i) la soluzione ottima del problema delle p-mediane è la stessa, sia che le localizzazioni avvengano solo nei nodi sia che possano avvenire anche lungo gli archi, e corrisponde sempre a localizzare in p nodi (ciò consente di affermare che la risoluzione del problema (5) vale anche nel caso generale),

(ii) la soluzione ottima del problema dei p-centri è diversa nel caso espresso dalle (6), corrispondente alla localizzazione solo nei nodi, rispetto al caso generale in cui i p punti possono essere scelti anche lungo gli archi.

Rispetto al problema dei p-centri, in questo lavoro è prevalentemente trattato il caso di localizzazione nei nodi, con un accenno al caso generale che è esposto invece diffusamente in Handler e Mirchandani (1979): quindi la formulazione di riferimento è la (6). I risultati di Hakimi sono esemplificati, su un caso con p=1 e n=2, $w_1=2$ e $w_2=18$, $d_{12} = d_{21} = 100$, in fig.8.



[Il punto A ha distanza 10 dal nodo 2]

$$\begin{cases} \text{1 - mediana (sui nodi): nodo 2} & (200) \\ \text{1 - mediana (generale): nodo 2} & (200) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{1 - centro (sui nodi): nodo 2} & (200) \\ \text{1 - centro (generale): punto A} & (180) \end{cases}$$

Figura 8 I risultati nel caso di localizzazione sui nodi e nel caso generale

Va inoltre segnalato che, dei due problemi delle p-mediane e dei p-centri, l'uno può essere ridotto all'altro attraverso una opportuna riformulazione (Krarup e Pruzan, 1981), cosicché un algoritmo che risolva il primo risolve anche il secondo e viceversa.

Esaminiamo ora gli algoritmi di risoluzione distinguendo i due tipi di problemi (5) e (6): ciò sia per la loro differente natura e per i diversi risultati che si ottengono (teoremi di Hakimi), che per il fatto che il problema (6) ha, come vedremo, una sorta di problema "inverso" strettamente collegato ad esso e molto noto. In entrambi i casi, comunque, il problema è NP-completo (Garey e Johnson, 1979) e quindi l'uso di metodi esatti, non polinomiali, può essere impossibile per problemi di dimensioni medio-grandi.

Il *problema della p-mediana* è risolto principalmente con (si veda lo schema del paragrafo 4):
(a) metodi di ricerca nello spazio delle soluzioni intere,
(b) metodi brand and bound,
(c) metodi di dualizzazione dei vincoli,
(d) metodi euristici.
I primi sono i più facili anche se poco efficienti.
Già Hakimi (1965) propose un metodo di enumerazione di tutte le configurazioni che però comporta l'esame di $\binom{n}{p}$ combinazioni e può risultare proibitivo. Se il grafo è un albero non orientato Goldman (1971) e ancora Hakimi (Kariv e Hakimi , 1979) hanno proposto metodi polinomiali di complessità $O(n^2p^3)$ basati su un risultato teorico di Goldman.
I metodi di branch and bound (o metodi primali) rilassano le condizioni di integralità (5.e): si noti che la condizione per δ_{ij} con $i \neq j$ può essere correttamente sostituita da $\delta_{ij} \geqslant 0$ in virtù dell'ipotesi di capacità illimitata, mentre viene effettivamente rilassata per δ_{ii} (e sostituita da $0 \leqslant \delta_{ii} \leqslant 1$). L'albero di branch è esplorato definendo, ad ogni nodo, gli insiemi degli impianti aperti, chiusi e liberi (su questi ultimi è fatta l'operazione di branch). I principali articoli sono di Jarvinen, Rajala e Sinervo (1972) e di Cornuejols,Fisher e Nemhauser (1977).
I metodi di dualizzazione riformulano il problema trasferendo alcuni vincoli (normalmente i vincoli (5.b) e/o (5.c)) nella lagrangiana: ciò consente di ottenere un insieme di n sottoproblemi, connessi tra loro dalle variabili duali λ (i moltiplicatori dei vincoli), più facili da risolvere separatamente. I principali esempi di questo modo di procedere sono Erlenkotter (1978), Christofides e Beasley (1982) e ancora Cornuejols, Fisher e Nemhauser (1977) in cui

sono combinati, con risultati molto efficaci, i metodi di branch and bound e di dualizzazione.
Infine esaminiamo i principali metodi euristici, molto usati nel problema delle p-mediane. Maranzana (1964) ha proposto un metodo di interscambio che è l'analogo nel discreto del metodo di Miehle per il caso continuo (si veda la fig.5): si selezionano p nodi, si allocano gli utenti agli impianti più vicini, si induce una partizione in p sottoinsiemi dei nodi del grafo, per ciascun sottoinsieme si calcola la mediana ottenendo (altri) p nodi e si ripete la procedura finché cambiano le localizzazioni. In Kuehn e Hamburger (1963), Teitz e Bart (1968) sono esposti metodi di *add* o di add and drop, basati sulla sostituzione di uno dei p nodi di localizzazione con un altro più favorevole e non ancora selezionato. In Jarvinen, Rajala e Sinervo (1972) è indicato un metodo euristico basato sul branch and bound.
In generale la dimensione dei problemi che gli algoritmi citati sono in grado di trattare non è elevata; i metodi esatti possono affrontare problemi con qualche decina di impianti e di utenti, i metodi euristici possono arrivare ad una o due centinaia di utenti ed alcune decine di impianti: questi dati sono tratti da Cornuejols, Fisher e Nemhauser (1972), che è forse il miglior lavoro apparso in questi anni su questo problema.

Il *problema dei p-centri*, esaurientemente trattato in Handler e Mirchandani (1979) e Larson e Odoni (1981), è affrontato essenzialmente con tecniche di teoria dei grafi, cioè (in ultima analisi) di ricerca nello spazio delle soluzioni intere.
Iniziamo dall'esame del problema di localizzazione con p=1.
Se il problema è circoscritto ai soli nodi (localizzazione del centro di un grafo), esso è facilmente risolto ispezionando una matrice ottenuta moltiplicando i vari elementi delle righe (colonne) della matrice $\underline{\underline{D}}$ con i pesi w_j dei vari utenti e scegliendo il nodo corrispondente a quella riga (colonna) in cui il valore del massimo elemento è minimo: nell'esempio di fig.7, in cui i pesi sono tutti unitari, il centro del grafo è nel nodo 4 se il servizio è dall'impianto agli utenti, nel nodo 1 se è dagli utenti all'impianto.
Se invece il problema è generale (localizzazione del punto che è il *centro assoluto* del grafo), in Handler e Mirchandani (1979) è esposto un metodo che riprende i risultati di Hakimi (1964) e se

ne serve per calcolare i cosiddetti centri locali sugli archi (*): il punto che risolve il problema è il migliore tra i centri locali. In virtù di un teorema formulato da Odoni (Larson e Odoni, 1981), si ottiene un test che consente di limitare fortemente il numero degli archi su cui calcolare il centro locale.
La fig. 9 mostra il calcolo dei centri locali e la soluzione ottima per un caso con n=3, $w_j=1$ per j=1,2,3 (e naturalmente p=1).

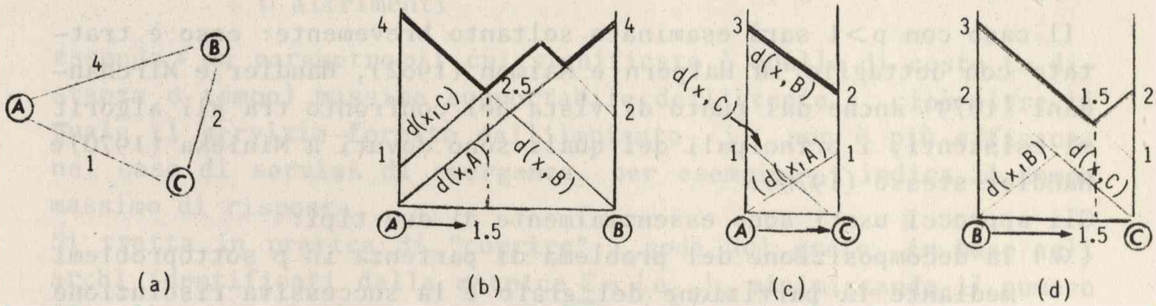


Figura 9 Risoluzione grafica del problema della localizzazione del centro assoluto di un grafo:

(a) il grafo (n=3) e le distanze dirette;
(b) la spezzata che rappresenta la massima distanza dai nodi e che permette di individuare il centro locale sull'arco (A,B), il punto a distanza 1.5 da A con valore 2.5 della massima distanza;
(c) lo stesso per il centro locale sull'arco (A,C), il punto C con valore 2 della massima distanza;
(d) lo stesso per il centro locale sull'arco (B,C) il punto a distanza 1.5 da B con valore 1.5 della massima distanza.

La soluzione corrisponde al centro locale sull'arco (B,C) ed il valore della funzione obiettivo è 1.5.

Va inoltre segnalato che, qualora il grafo sia un albero, esiste un algoritmo dovuto ad Handler che risolve il problema, sia nel caso di localizzazione nei soli nodi che nel caso generale, di stupe-

---

(*) Il centro locale sull'arco (i,j) è il punto x di (i,j) che minimizza la massima distanza (pesata) dai nodi. Esiste un centro locale per ogni arco del grafo.

facente semplicità. L'algoritmo ha i 3 passi seguenti:

(1) scelto un vertice qualsiasi i del grafo, trovare il nodo terminale (*) a maggiore distanza da i (sia h tale nodo);
(2) trovare il nodo terminale a maggior distanza da h (sia k tale nodo);
(3) il punto x corrispondente al centro assoluto del grafo è il punto di mezzo del cammino tra h e k, mentre il nodo corrispondente al centro del grafo è il nodo più vicino al punto x.

La complessità dell'algoritmo è O(n) (Handler, 1979).

Il caso con $p>1$ sarà esaminato soltanto brevemente: esso è trattato con dettaglio in Halpern e Maimon (1982), Handler e Mirchandani (1979) anche dal punto di vista del confronto tra gli algoritmi esistenti, i principali dei quali sono dovuti a Minieka (1970) e Handler stesso (1979).

Gli approcci usati sono essenzialmente di due tipi:

(α) la decomposizione del problema di partenza in p sottoproblemi mediante la partizione del grafo e la successiva risoluzione di p sottoproblemi (coordinati tra loro) di determinazione di un centro;
(β) l'uso iterativo delle tecniche di set covering, di cui parleremo tra breve.

Esistono algoritmi esatti e versioni euristiche degli stessi la cui efficienza consente di trattare problemi di media dimensione: in Garfinkel, Neebe e Rao (1977) sono mostrati i risultati per grafi fino a 60 nodi e una o due centinaia di archi.

Il problema dei p-centri, nel caso di localizzazione nei soli nodi, è strettamente collegato ad un altro classico problema di ottimizzazione combinatoria, quello detto *di set covering*, una delle cui formulazioni (quella più esplicitamente connessa al problema dei p-centri) è la seguente:

(*) Un nodo terminale è un nodo di grado 1, cioè con un solo arco incidente.

$$\min \left(\sum_{1}^{n} {}_{i} \; \delta_{ii} \right) \qquad (7.a)$$

$$\sum_{1}^{n} {}_{i} \; e_{ij} \; \delta_{ij} = 1 \qquad (j=1,\dots,n) \qquad (7.b)$$

$$\sum_{1}^{n} {}_{j} \; \delta_{ij} \leqslant n \; \delta_{ii} \qquad (i=1,\dots,n) \qquad (7.c)$$

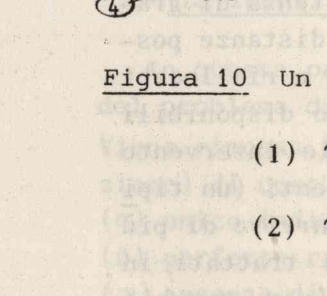
$$\delta_{ij} = 0,1 \qquad (\forall\; i,\; j) \qquad (7.d)$$

$$e_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{se } d_{ij} \leqslant \tau \\ = 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (\forall\; i,\; j) \qquad (7.e)$$

essendo τ un parametro il cui significato è quello di costo (o distanza o tempo) massimo sopportabile dell'utente j, cioè oltre il quale il servizio fornito dall'impianto i non è più efficace: nel caso di servizi di emergenza, per esempio, τ indica il tempo massimo di risposta.

Si tratta in pratica di "coprire" i nodi del grafo, in base agli archi identificati dalla matrice $\underline{\underline{E}} = \{e_{ij}\}$, minimizzando il numero di nodi necessari per questa operazione (*).

In fig. 10 è mostrato un grafo non orientato e con pesi unitari ai nodi, la matrice delle distanze minime $\underline{\underline{D}}$ e due esempi della matrice $\underline{\underline{E}}$ corrispondenti a due valori del parametro τ.



0	200	80	220	60
200	0	120	130	180
80	120	0	140	140
220	130	140	0	280
60	180	140	280	0

D

1		1		1
	1	1	1	
1	1	1	1	1
	1	1	1	
1		1		1

E_1

1		1		1
	1			
1		1		
			1	
1				1

E_2

Figura 10 Un problema di set-covering. Soluzione per

$$(1) \quad \tau = 150 \text{ (matrice } \underline{\underline{E}}_1\text{)}: \quad \sum_{1}^{n} {}_{i} \; \delta_{ii} = 1 \text{ (nodo 3)};$$

$$(2) \quad \tau = 100 \text{ (matrice } \underline{\underline{E}}_2\text{)}: \quad \sum_{1}^{n} {}_{i} \; \delta_{ii} = 3 \text{ (nodi 1,2,4)}.$$

(*) E' facile notare che il problema (7) è una sorta di "inverso" del problema (6), dal momento che la funzione obiettivo di quest'ultimo determina i valori e_{ij} nelle (7.e) mentre la condizione (6.c) del problema dei p-centri diventa la funzione obiettivo del problema di set covering.

Il problema di set covering ha applicazioni in molti settori anche indipendenti dalla localizzazione ed è, come detto, un problema classico della ricerca operativa. La sua risoluzione è affrontata attraverso:

(a) metodi di programmazione a numeri interi (in particolare di programmazione Booleana),

(b) metodi di ricerca su grafo e tecniche di branch and bound.

Rassegne di algoritmi ed esame della loro complessità computazionale sono contenuti in Salkin (1975), Garey e Johnson (1979).

Completiamo questo esame del problema della localizzazione di p impianti nel caso discreto accennando brevemente ad alcune generalizzazioni dei modelli citati.
La prima è relativa alla possibilità di considerare *contemporaneamente i due tipi di obiettivi* visti in precedenza e cioè la minimizzazione della somma dei costi di trasporto (o costo medio) e quella del costo massimo. Un esempio è dato dalla localizzazione dei servizi scolastici in cui è importante tenere conto sia della distanza media che di quella massima. Questo problema è solo accennato qui e sarà trattato con più dettaglio in 5.6 dedicato al caso con obiettivi multipli.
La seconda riguarda la possibilità di considerare *il problema dinamico,* cioè la localizzazione di p impianti nel tempo e/o la possibilità di riallocarli periodicamente. Questo problema può avere un interesse rilevante qualora i rapporti reciproci tra i costi di trasporto cambino nel tempo e si riduce, di fatto, ad un problema con un aumentato numero di variabili decisionali. Alcuni risultati sono esposti, per esempio, in Wesolowsky e Truscott (1975).

La terza è relativa alla possibilità di considerare *alcuni aspetti stocastici del problema*, in particolare l'esistenza di grafi probabilistici (cioè di grafi in cui i tempi o le distanze possano cambiare o in cui le localizzazioni siano mobili e riallocabili nel tempo) e l'esistenza di servizi che non sono disponibili per parte del tempo e quindi richiedono l'eventuale intervento di altri impianti in risposta alle richieste degli utenti (un tipico esempio sono i servizi di emergenza nel caso di arrivo di più chiamate ravvicinate). Problemi di questo tipo sono trattati in Berman e Odoni (1982) e nei contributi di Beltrami (per esempio Beltrami, 1979).

5.2.3 Caratteristiche del problema di localizzazione da soli costi di trasporto

Dal momento che il problema in esame è stato trattato con un certo dettaglio, distinguendo una serie di casi diversi, si rende necessario riassumere ora gli aspetti salienti secondo lo schema di valutazione dello stato delle conoscenze modellistiche introdotto in 5.1.

Algoritmi: sono molti, sia esatti che euristici, sia per il problema continuo che per quello discreto, sia con il criterio dell'efficienza che con quello del caso peggiore, e coprono praticamente tutto lo spettro delle metodologie (vedi paragrafo 4).

Codici: quasi tutti gli algoritmi, ad eccezione dei primi proposti all'inizio degli anni '60, sono documentati anche in termini di programmi di calcolo e di risultati computazionali su alcuni problemi campione.

Teoria: in questo settore esiste il maggior corpo teorico relativo alla localizzazione, come insieme sia di problemi trattati che di risultati ottenuti; in alcuni casi addirittura la teoria ha preceduto e suggerito la realizzazione di metodi di risoluzione.

Complessità: anche per questo aspetto ci sono risultati ormai assestati relativi alla complessità del problema discreto (polinomiale se il grafo è un albero, NP-completo il problema generale) ed all'esame del comportamento dei principali tipi di algoritmi euristici.

5.3 La localizzazione da costi di trasporto e di impianto

In questa parte è descritto il secondo livello di formulazione del problema di localizzazione.

Viene rimossa l'ipotesi di assenza (o indifferenza alla localizzazione) di costi di impianto, mentre restano le altre:
(α) unico indicatore di preferenza dato dai costi,
(β) perfetta razionalità del decisore,
(γ) assenza di vincoli tecnologici.

Nella struttura del problema (vedi 3.2) la presenza di costi di impianto con rendimenti crescenti agisce come fattore

limitante sul numero degli impianti da localizzare e quindi rende superflua o addirittura non ammissibile la presenza del vincolo sul numero di impianti (ciò non vale se i costi di impianto sono lineari).
L'assenza di vincoli tecnologici, in particolare di vincoli di capacità degli impianti, rende la struttura abbastanza semplice (simile al caso trattato in 5.2) e rende ancora valida la proprietà, assai utile dal punto di vista computazionale, che ciascun utente si serva dell'impianto aperto a lui più vicino: il problema è detto spesso non-capacitivo proprio per mettere in luce questa proprietà.

I parametri fondamentali che definiscono il problema sono:
- la funzione obiettivo espressa secondo il criterio dell'efficienza,
- lo spazio discreto.

L'insieme di problemi si presenta, quindi, decisamente più povero rispetto a quelli trattati in 5.2 (un solo caso, dei quattro prima esaminati): questo avviene in corrispondenza ad una maggiore complessità della funzione obiettivo che deve pesare (e bilanciare) due effetti, quello dovuto ai costi di trasporto che spinge verso soluzioni decentralizzate (molti piccoli impianti presso gli utenti) e quello dovuto ai costi di impianto che spinge verso soluzioni centralizzate nel caso in cui sia possibile usufruire di rendimenti crescenti (pochi grandi impianti, con economia di scala).
Una suddivisione può essere fatta (si veda il punto (g) di 3.1) in base alla forma delle funzioni di costo relative agli impianti, che sono
(g1) lineari
(g2) lineari con carica fissa
(g3) concave o lineari a tratti.
Trascureremo il primo tipo di funzione, poco significativo, ed esamineremo gli altri due.
Esempi di applicazione di questo problema sono sia nel settore pubblico che in quello privato, per lo più esposti in singoli articoli. Una bibliografia selezionata dei lavori apparsi fino al 1974 è contenuta in Francis e Goldstein (1974), una rassegna di quelli più recenti in Coelho (1981), altri articoli di rassegna sono ReVelle, Marks e Liebman (1970), Bartezzaghi (1979). Assai meno numerosi degli articoli sono invece i libri e le trattazioni compatte.

La formulazione del *problema di localizzazione non capacitivo con carica fissa* (caso (g2)), tratta da Efroymson e Ray (1966), è

$$\min\left(\sum_{1i}^{m} \sum_{1j}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{1i}^{m} f_i\, y_i\right) \qquad (8.a)$$

$$\sum_{1i}^{m} x_{ij} = 1 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (8.b)$$

$$\sum_{1j}^{n} x_{ij} \leqslant n\, y_i \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (8.c)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (\forall i,j) \qquad (8.d)$$

$$y_i = 0,1 \qquad (\forall i) \qquad (8.e)$$

in cui le variabili x_{ij} rappresentano la frazione di domanda dell'utente j soddisfatta dall'impianto i ed il costo c_{ij} è ottenuto tramite la conoscenza della distanza minima d_{ij} e della domanda w_j (per esempio, è $c_{ij} = k\, d_{ij}\, w_j$).

I primi contributi su questo problema si devono a Kuehn e Hamburger (1963) e a Manne (1964) e sono relativi alla formulazione del problema ed alla realizzazione di algoritmi euristici, del tipo add and drop, cui hanno fatto seguito le proposte di algoritmi esatti, essenzialmente basati su metodi di branch and bound.

I risultati teorici non sono molti, al di là di quelli generali sulla programmazione a numero interi di cui il problema (8) è un caso particolare.
Uno dei risultati più sfruttati, soprattutto per gli algoritmi di branch and bound, è una proprietà, dimostrata da Efroymson e Ray (1966), relativa alle variabili Booleane y_i di localizzazione. Rilassando le condizioni (8.e) di integralità sulle variabili y_i e sostituendole con le

$$0 \leqslant y_i \leqslant 1 \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (8.e')$$

il programma (8.a)-(8.e') risulta lineare. Efroymson e Ray dimostrano che la soluzione ottima di tale programma deve soddisfare la (8.c) col segno di uguaglianza: ciò consente la eliminazione *a priori* delle variabili y_i e la risoluzione del problema nelle sole

variabili x_{ij} ("per ispezione", cioè semplicemente esaminando i dati del problema, in questo caso la sua funzione obiettivo) come insieme di n problemi disaccoppiati, uno per ogni utente. Naturalmente questa operazione va fatta ad ogni nodo dell'albero di branch, rispetto alle variabili y_i libere (*).
Un'altra proprietà teorica di questo problema (McKeown, 1975) discende direttamente dal fatto che esso, sia nella versione (g2) con carica fissa che in quella (g3) con costi concavi, è un problema di programmazione con funzione obiettivo concava e vincoli lineari nelle variabili x_{ij} : ciò consente di affermare che la soluzione ottima del problema si trova in uno dei punti estremi della regione delle soluzioni ammissibili nello spazio delle variabili x_{ij} (cioè in pratica che la soluzione ottima è tale da avere $x_{ij} = 0$ o 1, $\forall i,j$) il che concorda ovviamente con l'idea che ogni utente si serva di un solo impianto. Questo fatto viene sfruttato per trasformare il problema in uno di tipo combinatorio, esaminando soltanto le soluzioni intere.
Altre proprietà usate negli algoritmi di risoluzione sono invece di tipo generale, per esempio quelle del rilassamento lagrangiano usate in Swain (1974).

I principali approcci alla risoluzione esatta del problema non capacitivo con carica fissa sono
(a) i metodi di rilassamento dei vincoli,
(b) i metodi di ricerca nello spazio delle variabili intere.
Del primo tipo fanno parte gli algoritmi di branch and bound, i principali dei quali sono dovuti a Efroymson e Ray (1966), Spielberg (1969), Khumavala (1972), spesso differenziati solo dalle regole di scelta delle variabili su cui fare l'operazione di branch e molti basati sulla proprietà descritta poco sopra. Pure del primo tipo sono gli algoritmi di rilassamento lagrangiano, i cui principali sono quelli di Swain (1974) e di Erlenkotter (1978), che riformulano il problema usando anche le informazioni che si ottengono dal problema duale.
Del secondo tipo sono gli algoritmi che, sfruttando la seconda proprietà descritta in precedenza, risolvono il problema attraverso procedure di enumerazione implicita e/o di ranking delle solu-

---

(*) Ogni nodo dell'albero si caratterizza per avere alcune variabili y_i fissate al valore 0, altre fissate al valore 1, altre ancora libere (che possono cioè assumere valori compresi tra 0 e 1).

zioni intere: esempi di questo tipo sono Gray (1971), McKeown (1975), Bartezzaghi, Colorni e Palermo (1981).

Esistono inoltre, e sono numerosi, i metodi euristici.
Già nella iniziale formulazione di Kuehn e Hamburger (1963) ne veniva indicato uno(dei più usati)basato sulla apertura successiva di un impianto alla volta. Altre varianti alla tecnica di add and drop sono i metodi indicati da Manne (1964) e Walker (1976).
Un altro gruppo di algoritmi euristici è basato sulla estensione dei metodi di risoluzione del problema delle p-mediane al caso in cui siano presenti anche costi fissi di impianto: un esempio è Hochbaum (1982).
Recentemente infine l'uso di metodi di ricerca casuale e di ottimizzazione globale ai problemi combinatori ha aperto una strada che sembra promettente (Camerini, Colorni e Maffioli, 1983).

Le dimensioni dei problemi trattati sono dello stesso ordine di grandezza di quelle dei problemi delle p-mediane e dei p-centri. In particolare i metodi esatti arrivano a trattare casi con $m = 100$ e $n = 200$, i metodi euristici possono esaminare casi un po' più grandi: questi dati sono ottenibili direttamente dagli articoli citati, in ognuno dei quali sono indicati anche tempi e informazioni sui codici di calcolo utilizzati. Recentemente è comparso un algoritmo esatto basato su metodi di dualizzazione (Van Roy e Erlenkotter, 1982) per il problema non capacitivo dinamico, i cui risultati e la cui capacità di trattare problemi con elevato numero di variabili (numero dovuto all'effetto moltiplicativo della struttura dinamica) sono notevoli: $m=25$, $n=50$, da moltiplicare entrambi per 10 che è il numero dei periodi. Inoltre uno dei più recenti metodi euristici proposti (Hochbaum, 1982) è corredato da un calcolo dettagliato della complessità computazionale, che è $O(n^2 m)$.

Completiamo l'esame del problema con carica fissa accennando ad alcune generalizzazioni dei modelli citati.
La prima è relativa al *caso dinamico*: il già segnalato articolo di Van Roy ed Erlenkotter (1982) ne è il principale esempio.
La seconda è relativa all'esame del caso in cui siano ipotizzabili anche un certo numero di *impianti intermedi:* si veda in proposito ReVelle, Marks e Liebman (1970).
Altre possibili generalizzazioni saranno esaminate a proposito del caso capacitivo, per cui sono maggiormente significative.

La formulazione del *problema di localizzazione con costi concavi* (caso (g3)), tratta da Feldman, Lehrer e Ray (1966), è:

$$\min\left(\sum_{1}^{m} {}_i \sum_{1}^{n} {}_j c_{ij} x_{ij} + \sum_{1}^{m} {}_i f_i(y_i)\right) \qquad (9.a)$$

$$\sum_{1}^{m} {}_i x_{ij} = w_j \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (9.b)$$

$$\sum_{1}^{n} {}_j x_{ij} = y_i \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (9.c)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (\forall i,j) \qquad (9.d)$$

$$y_i \geq 0 \qquad (\forall i) \qquad (9.e)$$

in cui le variabili x_{ij} rappresentano le richieste dell'utente j soddisfatte dall'impianto i (non più, come nel problema (8), le frazioni di domanda) e le variabili y_i rappresentano le dimensioni degli impianti.

Il problema con costi concavi fu posto inizialmente da Feldman, Lehrer e Ray come estensione del problema di Kuehn e Hamburger e di Manne: anche in questo caso il metodo di risoluzione proposto era di tipo euristico.
Il risultati teorici relativi a questo problema sono essenzialmente legati al fatto che si tratta di un problema di programmazione separabile (è cioè costituito da un insieme di vincoli lineari con funzione obiettivo data da una somma di termini non lineari $f_i(y_i)$ ciascuno dei quali è funzione di una sola variabile); per tale tipo di problemi è possibile una riformulazione che sostituisce alle funzioni $f_i(y_i)$ delle funzioni lineari a tratti: ciò consente una linearizzazione del problema, anche se questo fatto si paga in termini di un aumentato numero di variabili.

Il principale approccio alla risoluzione del problema con costi concavi è pertanto quello della linearizzazione, unito a metodi di branch and bound per la ricerca nello spazio delle variabili del problema riformulato: l'algoritmo più noto in questo filone è quello di Soland (1974), che funziona (con poche varianti) sia nel caso non capacitivo che in quello capacitivo.

I metodi euristici sono del tipo add and drop: quello proposto da Feldman, Lehrer e Ray (1966) inizia dall'esame della configurazione corrispondente a tutti gli impianti aperti e procede con la chiusura successiva di un impianto alla volta.

Le dimensioni dei problemi trattati sono di m=25 e n=50 per la risoluzione esatta (Soland), mentre sono ancora quelle del problema campione di Kuehn e Hamburger per i metodi euristici.
Le generalizzazioni, più teoriche che effettivamente proposte, sono ancora quelle del caso con carica fissa.

E' ora possibile riassumere gli aspetti salienti del problema di localizzazione con costi di trasporto e di impianto (caso non capacitivo) secondo lo schema di valutazione introdotto in 5.1.

Algoritmi: sono molti, sia esatti che euristici, e coprono un ampio spettro di metodologie (vedi paragrafo 4).

Codici: praticamente tutti gli algoritmi presentati sono documentati in termini di programmi di calcolo e di risultati computazionali su alcuni problemi campione (non di rado si tratta dello stesso problema, come per il caso proposto da Kuehn e Hamburger, il che consente un certo confronto tra i vari programmi).

Teoria: non è molto ricca e comunque non è specifica, nel senso che si rifà prevalentemente alle metodologie generali della programmazione a numeri interi (per esempio i metodi di rilassamento).

Complessità: non è molto studiata, salvo che in articoli molto recenti (per esempio quello di Hochbaum); si tratta comunque di un problema NP-completo.

5.4 La localizzazione con vincoli tecnologici

In questa parte è descritto il terzo livello di formulazione del problema di localizzazione.
Viene rimossa l'ipotesi di assenza di vincoli tecnologici, mentre restano le altre:
(α) unico indicatore di preferenza dato dai costi,
(ß) perfetta razionalità del decisore.

Nella struttura del problema (vedi 3.2) compaiono

una serie di vincoli aggiuntivi che saranno descritti nel seguito e che hanno come effetto quello di renderlo più aderente alla realtà, pur complicandone in molti casi la risoluzione.
Di questi vincoli, qui indicati come "tecnologici", ce n'è uno in particolare che modifica radicalmente la struttura del problema: si tratta del vincolo sulla capacità degli impianti, che distrugge la proprietà (fin qui utilizzata) che ogni utente sia servito dall'impianto a lui più vicino, cioè che la domanda sia indivisibile.
Nel caso trattato qui, invece, una soluzione del problema comporta due fasi distinte:
(i) la localizzazione degli impianti,
(ii) la allocazione degli utenti agli impianti.
La fase (ii) si traduce nella risoluzione di un problema di trasporto (se i costi relativi sono lineari) e deve essere ripetuta, almeno teoricamente, per ogni localizzazione cioè per ogni realizzazione della fase (i).
E' chiaro allora che la complessità del problema e la velocità di risoluzione dipendono essenzialmente dal numero di volte in cui è ripetuta la fase (ii) (tale numero può essere anche notevolmente abbassato rispetto a quello teorico) piuttosto che dal comportamento dell'algoritmo nella ricerca delle soluzioni.
L'effetto degli altri vincoli (più marginale) verrà discusso nell'esame delle generalizzazioni del problema, che è spesso chiamato problema capacitivo per mettere in luce questa caratteristica.

I parametri fondamentali che definiscono il problema (vedi la tab.1 e la fig.3) sono:
- la funzione obiettivo espressa secondo il criterio dell'efficienza (e, in genere, con costi di impianto di tipo lineare con carica fissa),
- lo spazio discreto.

Il numero degli impianti da aprire è ovviamente determinato dal rapporto tra i costi di trasporto e quelli di impianto e dalle capacità degli impianti. La fase di localizzazione e quella di allocazione sono controllate dallo stesso decisore.

Articoli di rassegna sono, come nel caso non capacitivo, Francis e Goldstein (1974), ReVelle, Marks e Liebman (1970), Salkin (1975, cap. 12) riguardo al settore privato, Coelho (1981) per quanto riguarda il settore pubblico. Le applicazioni più rilevanti di questo problema si hanno nel settore privato, anche in relazione a casi di produzione multisettoriale (e di eventuale interdipendenza produttiva)e/o multiperiodale.

La formazione più classica del problema capacitivo, trascurando altri vincoli tecnologici e nel caso di costi lineari con carica fissa,è :

$$\min\left(\sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i}^{m} f_i\, y_i\right) \qquad (10.a)$$

$$\sum_{i}^{m} x_{ij} = w_j \qquad (j=1,\dots,n) \qquad (10.b)$$

$$\sum_{j}^{n} x_{ij} \leqslant q_i\, y_i \qquad (i=1,\dots,m) \qquad (10.c)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (\forall i,j) \qquad (10.d)$$

$$y_i = 0,1 \qquad (\forall i) \qquad (10.e)$$

I primi contributi alla risoluzione di questo problema sono di Sà (1969): il problema nasce come estensione del caso non capacitivo e quindi si innesta sulla stessa matrice teorica, quella della programmazione lineare a numeri interi (vedi 5.3).
I principali approcci alla risoluzione esatta del problema sono
(a) i metodi di branch and bound,
(b) i metodi di ricerca nello spazio delle variabili intere.
Del primo tipo sono , tra gli altri, gli algoritmi di Sà (1969), di Soland (1974) che funziona anche per il caso non capacitivo e con costi concavi, di Akinc e Khumavala (1977) che fornisce alcuni efficaci criteri di selezione dei nodi e delle variabili da esaminare nelle operazioni di branch, di Geoffrion e McBride (1978) che unisce alla tecnica di branch and bound alcuni risultati teorici derivati dal rilassamento lagrangiano, di Ross e Soland (1977) che riformula il problema come problema di assegnamento, mentre tra i metodi di ricerca nello spazio delle variabili intere segnaliamo un algoritmo di ranking (Bartezzaghi, Colorni e Palermo 1981). Tra i metodi euristici, la maggioranza è del tipo add and drop (Sà, 1969, Kuehn e Hamburger, 1963, Feldman, Lehrer e Ray 1966) mentre si prospettano anche metodi di ottimizzazione globale.

Le dimensioni dei problemi che si riescono a trattare non dipendono tanto dal numero di impianti potenziali (m) e di utenti (n) quanto dal numero di problemi di trasporto effettivamente risolti rispetto a quelli teorici. Questo a sua volta dipende dalla struttura dei dati, in particolare dal rapporto tra costi fissi e costi variabili, dalla maggiore o minore uniformità dei loro valori e dai valori delle capacità: uno studio in questo senso è contenuto in Bartezzaghi, Colorni e Palermo (1976,1981). L'ordine di grandezza è, comunque, di poche decine di unità per m(da 15 a 25) e di valori poco maggiori per n (tra 40 e 50): queste indicazioni compaiono nei lavori citati, unitamente alle informazioni sui programmi di calcolo.

Alcuni possibili sviluppi e generalizzazioni del problema di localizzazione capacitivo sono indicati sinteticamente in fig.11, tratta da Bartezzaghi, Colorni e Palermo (1976), e rimandano alla classificazione dei vincoli fatta in 3.2.

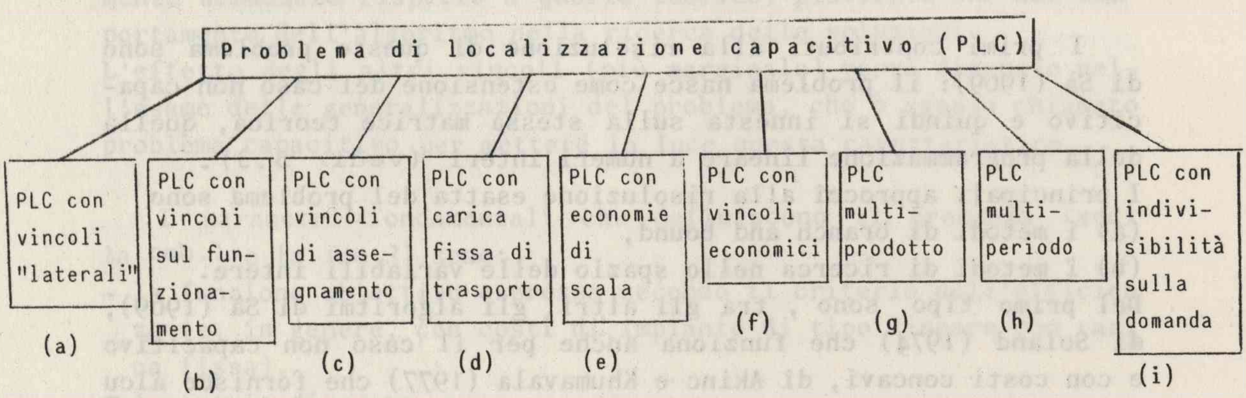


Figura 11 Le possibili generalizzazioni del problema di localizzazione capacitivo

Alcuni dei blocchi della figura si spiegano da sé, altri sono stati esaminati in 3.2, altri ancora saranno brevemente commentati.
Prima di farlo, però, si può segnalare (Coelho, 1981) il fatto che, nella maggioranza dei casi, si riesce ad esprimere questi vincoli attraverso condizioni lineari del tipo

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{b}} \qquad (11)$$

da aggiungere al problema (10); A e B sono matrici e b è un vettore di dimensioni opportune, per cui le condizioni (11) non distruggono la linearità del sistema di vincoli: ciò non vale, per esempio, per i casi (d) ed (e) di fig. 11, in cui le variazioni sono relative alla funzione obiettivo e sono non lineari.

Commentiamo ora alcuni casi.

Il problema di localizzazione nel caso di *azienda multiprodotto* è trattato, tra gli altri, da Warszawski (1974) attraverso un algoritmo di enumerazione implicita delle soluzioni: il problema, di tipo lineare nei vincoli per la ipotesi di assenza di effetti indotti tra le varie produzioni, si esprime essenzialmente attraverso un aumento del numero delle variabili.

Il problema di *localizzazione multiperiodale* introduce un aspetto recursivo nel tempo e/o nello spazio (*): veri e propri problemi dinamici sono affrontati da Erlenkotter (1981), in un articolo di rassegna di metodi euristici, e ancora da Warszawski (1974), mentre situazioni recursive nello spazio sono esaminate nei lavori di Nagelhout e Thompson (1981) e di Moore e ReVelle (1982).

Infine, esiste una numerosa serie di articoli a proposito del problema di *trasporto con carica fissa*, relativo cioè al caso in cui i costi c_{ij} di trasporto non siano lineari ma siano, a loro volta, del tipo indicato nella curva (g2) di fig. 2. Tra gli altri citiamo i lavori di Murty (1968) e di Gray (1971), importanti perché sono stati tra i primi a fornire regole efficienti per la ricerca nello spazio delle soluzioni intere, e di Kennington e Unger (1976), che sfruttano metodi di branch and bound integrati da tecniche "ad hoc".

Riassumiamo ora gli aspetti salienti del problema di localizzazione con vincoli tecnologici (caso capacitivo) secondo lo schema di valutazione introdotto in 5.1.

Algoritmi: sono abbastanza numerosi (anche se non certamente pari a quelli per il caso non capacitivo) sia esatti che euristici; viene usata prevalentemente la metodologia di branch and bound, con una serie

(*) In taluni casi infatti le scelte avvengono in stadi diversi che corrispondono a diversi livelli territoriali del problema, per esempio impianti produttori, impianti intermedi, magazzini, domanda finale.

di varianti specifiche per le diverse generalizzazioni del problema.

Codici: i vari algoritmi proposti forniscono anche indicazioni sui programmi di calcolo usati; è invece abbastanza carente un esame comparato dei risultati computazionali e soprattutto manca un'analisi dei risultati in funzione della struttura dei dati (costi, capacità ecc.) che risulterebbe, invece, assai utile in questo tipo di problema.

Teoria: i contributi teorici su questo tema sono pochi e non specifici; non è, per esempio, prestata particolare attenzione alla fase di allocazione, cioè al problema di trasporto, che essendo da ripetere più volte e con dati abbastanza simili potrebbe essere studiato e risolto in maniera più strutturata all'interno del problema complessivo.

Complessità: non è studiata assolutamente per gli algoritmi esatti (anche perché dipende essenzialmente dal numero di problemi di trasporto effettivamente risolti) e neppure per quelli euristici.

5.5 Razionalità e non dell'utente (i modelli entropici)

In questa parte è descritto il quarto livello di formulazione del problema di localizzazione.
Viene rimossa l'ipotesi di perfetta razionalità del decisore, mentre resta la prima:
(α) unico indicatore di preferenza dato dai costi.

La struttura del problema a questo livello è caratteristica della localizzazione di servizi pubblici (si veda quanto detto in proposito nel punto (β) del paragrafo 2). Il problema si presenta con un decisore che deve tenere conto del fatto che gli utenti del servizio non si comportano sempre, o non si comportano tutti, in modo razionale (minimizzando cioè degli indicatori che esprimono il costo in senso generalizzato del servizio). Questo fatto, tipico del settore pubblico e invece meno presente nel settore privato, si può esprimere affermando che il decisore controlla la fase di localizzazione ma non controlla la fase di allocazione degli utenti agli impianti (Coelho, 1981): questa fase produce un

insieme di flussi tra gli utenti e gli impianti che può non obbedire al puro criterio di minimizzazione dei costi ed essere invece determinato anche da altri fattori, il che produce un certo grado di dispersione dei flussi rispetto alla soluzione a minimo costo. Questo concetto è espresso attraverso le nozioni di *utilità casuale* e/o di *surplus del consumatore* (Wilson et al., 1981) e si traduce in una modifica della funzione obiettivo del problema di localizzazione per tener conto dell'effetto di non completa razionalità del sistema: in pratica, ciò significa che la funzione obiettivo comprende, oltre ai termini di costo vero e proprio descritti nelle parti precedenti, un termine di costo (o beneficio) in senso generalizzato che rappresenta l'utilità casuale.
Per il resto la struttura del problema piò essere più o meno semplice, secondo i livelli precedentemente discussi: normalmente compaiono sia i vincoli di soddisfacimento della domanda che quelli di capacità degli impianti o servizi, anche se la loro interpretazione è (in accordo con la derivazione di tutta questa parte dai modelli di simulazione del trasporto, in particolare dai modelli gravitazionali) quella di condizioni sul totale dei flussi in partenza dalle origini (utenti o impianti) e in arrivo alle destinazioni (viceversa).

I parametri fondamentali che definiscono il problema sono:
- la funzione obiettivo espressa secondo il criterio dell'efficienza, cioè come minimizzazione (massimizzazione) di una somma di termini di costo (beneficio),
- lo spazio discreto,che consente di esprimere a priori il costo dello spostamento tra i e j,

mentre gli altri parametri sono meno caratterizzanti.

Le applicazioni sono, come detto, quasi tutte relative alla localizzazione di servizi pubblici. Una recente rassegna di problemi e di tecniche risolutive è dovuta a Wilson (Wilson et al., 1981) che è senza dubbio il più noto esponente di questo tipo di approccio, cui ha lavorato dalla fine degli '60. Altre rassegne sono di Leonardi (1978, 1981), Coelho (1981)e Palermo (1981).

La formulazione del problema di localizzazione con la massimizzazione del surplus del consumatore (*), tratta da Bertuglia e

(*) Questo problema si esprime spesso attraverso la massimizzazione della differenza tra benefici e costi, invece che attraverso la consueta minimizzazione dei costi.

Leonardi (1982) con alcune modifiche formali per uniformarla alle notazioni precedenti, è:

$$\max \left(\eta \cdot \omega (x_{ij}) - \sum_{1i}^{m} \sum_{1j}^{n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{1i}^{m} f_i y_i \right) \qquad (12.a)$$

$$\sum_{1i}^{m} x_{ij} = w_i \qquad (j = 1,\dots,n) \qquad (12.b)$$

$$\sum_{1j}^{n} x_{ij} \leqslant q_i y_i \qquad (i = 1,\dots,m) \qquad (12.c)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (\forall i,j) \qquad (12.d)$$

$$y_i = 0,1 \qquad (\forall i) \qquad (12.e)$$

in cui gli impianti sono le origini dei flussi e gli utenti le destinazioni (qui si fa l'ipotesi che $\sum_{1i}^{m} q_i y_i \geqslant \sum_{1j}^{n} w_j$, condizione che può essere agevolmente trasformata in un'uguaglianza con l'aggiunta di un utente fittizio con domanda pari alla differenza tra le somme di sinistra e di destra).

Il termine $\omega (x_{ij})$ rappresenta una misura della dispersione dei flussi $\{x_{ij}\}$, η è un fattore di scala che rende omogenei i termini della (12.a).

Si deve massimizzare la funzione di utilità $\omega(x_{ij})$ meno i costi di localizzazione e del trasporto che producono i flussi $\{x_{ij}\}$.

Si assume come misura della dispersione

$$\omega(x_{ij}) = N! / \prod_i \prod_j x_{ij}! \qquad (13)$$

essendo $N = \sum_{1i}^{m} \sum_{1j}^{n} x_{ij}$ l'insieme totale dei flussi, e si preferisce massimizzare il logaritmo della funzione (13), sostituendo a $\eta \cdot \omega (x_{ij})$ il valore

$$\mu \log \omega(x_{ij}) = -\mu \log \prod_i \prod_j x_{ij}! + K =$$

$$= -\mu \sum_i \sum_j \log x_{ij}! + K \simeq -\mu \sum_i \sum_j x_{ij} (\log x_{ij} - 1) + K$$

dove l'ultima uguaglianza (approssimata) è ottenuta con la formula di Stirling, K è una costante che rappresenta il log N ! e che può essere trascurata nella massimizzazione, μ è un parametro che ha a che fare con il costo della dispersione: normalmente, si veda

Coelho (1981), il parametro μ viene posto uguale a $1/\beta$ essendo β il coefficiente della funzione esponenziale che misura l'impedenza spaziale tra i e j nel modello entropico.
In conclusione, quindi, la funzione obiettivo del problema (12) diventa:

$$\min \left(\frac{1}{\beta} \sum_{1}^{m}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{j} x_{ij} (\log x_{ij} - 1) + \sum_{1}^{m}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{1}^{m}{}_{i} f_i y_i \right) \qquad (12.a')$$

e quindi per $\beta \to \infty$ il modello complessivo torna ad essere uguale al modello (10) del problema capacitivo.

Il parametro β assume quindi (Palermo, 1981) il significato di fattore di valutazione delle distanze per l'intero gruppo degli utenti: per valori crescenti di β "l'attrito" costituito dalla distanza è avvertito con disagio crescente dagli utenti e la conseguente distribuzione dei flussi è meno dispersa; nelle condizioni di perfetta razionalità, cioè per $\beta \to \infty$, il disagio relativo alla distanza è massimo ed il gruppo degli utenti si alloca in modo da minimizzare il costo totale del trasporto per un assegnato insieme di impianti aperti.
Il modello (12) rientra nel più generale filone dei modelli entropici, così chiamati perché la configurazione dei flussi che si ottiene da essi si può interpretare come quella che massimizza l'entropia del sistema, naturalmente dato un certo valore del fattore di dispersione β. Non è questo l'ambito, nè sarei in grado di fare ora un esame della filosofia dei modelli entropici, neppure limitatamente al problema della localizzazione: il lettore interessato può far riferimento a qualcuno dei molti libri di Wilson, per esempio Wilson et al. (1981), o al suo stesso contributo in questo libro.
Lo stesso discorso vale per una esposizione dei contributi teorici, che sono molti anche se non specifici per le metodologie di risoluzione dei problemi di localizzazione.

Per quanto riguarda gli approcci usati per la risoluzione del problema (12), essi si riducono in generale all'uso delle condizioni analitiche della programmazione matematica (teoremi di Lagrange e di Kuhn- Tucker) e essenzialmente alle tecniche di rilassamento lagrangiano. Ciò comporta a mio parere alcuni limiti, al di là ovviamente del singolo algoritmo e dello specifico contributo, che mi paiono i seguenti:

(a) l'uso delle condizioni analitiche richiede di norma che le variabili del problema siano continue e differenziabili (anche se ciò non è sempre necessario), il che pone dei limiti all'uso dei modelli entropici in presenza di variabili binarie (si veda, per esempio, la riformulazione del problema di Efroymson e Ray fatta da Bertuglia e Leonardi (1982) con l'eliminazione delle variabili y_i di localizzazione);

(b) il risultato che si ottiene applicando le condizioni analitiche è costituito da un sistema di equazioni e disequazioni da risolvere, il che può non essere sempre facile (al di là del caso ricorrente in cui la soluzione è costituita da un esponenziale) e comunque deve spesso avvenire attraverso metodi numerici;

(c) il mancato utilizzo di metodi evolutivi nella risoluzione del problema di ottimizzazione (12), o di suoi analoghi, impedisce di fatto un confronto tra gli algoritmi, la loro complessità, le prestazioni rispetto alla struttura dei dati e così via.

Una conseguenza di quanto ho appena affermato è che non esistono in pratica risultati computazionali su problemi-campione e quindi non è possibile affermare con precisione quali sono le dimensioni dei problemi trattabili.

Esistono alcune possibili generalizzazioni del problema (12), le cui principali sono le seguenti.
Una prima è relativa a casi in cui la componente casuale non è solo inerente al comportamento degli utenti, ma anche a quello della *rete*. E' già stato citato in 5.2, a proposito dei problemi delle p-mediane e/o dei p-centri, il caso dei grafi probabilistici (Berman e Odoni, 1978), un altro esempio è contenuto in Ermoliev e Leonardi (1981) considerando aspetti stocastici nella domanda e nella rete.
Una seconda generalizzazione possibile è quella di introdurre nel problema tutta una serie di *vincoli tecnologici:* per questo discorso rimandiamo a quanto detto in proposito nella parte finale di 5.4 e in fig. 11.
Una ulteriore generalizzazione (Mayhew e Leonardi, 1982) è quella di tener conto formalmente di diversi criteri di scelta, passando alla programmazione con *obiettivi differenti:* di ciò si parlerà nel seguente punto 5.6.

Riassumiamo quindi gli aspetti salienti del problema di localizzazione con funzioni di costo e di utilità casuale (il modello entropico) secondo lo schema di valutazione introdotto in 5.1.

Algoritmi: non sono molti ed hanno uno spettro molto ristretto (uso della lagrangiana e delle condizioni analitiche); mancano gli algoritmi euristici ed in generale il confronto tra i vari metodi.

Codici: sono in genere assenti, almeno al livello di documentazione degli articoli pubblicati, come assenti sono i risultati computazionali su problemi-campione.

Teoria: è ampia, anche se non è direttamente finalizzata al problema della localizzazione (piuttosto ai problemi di trasporto e a quelli legati alle teorie del comportamento).

Complessità: non è assolutamente trattato.

5.6 Obiettivi multipli

In questa parte è descritto il quinto e ultimo livello di formulazione del problema di localizzazione.
Viene rimossa anche la prima ipotesi fatta e cioè che ci sia un unico indicatore di preferenza.

La struttura del problema (abbastanza tipica del settore pubblico) è determinata essenzialmente dal fatto che esiste un sistema decisionale che definiremo "complesso" (si veda il punto (ß) del paragrafo 2) e che può comprendere uno o più decisori e/o l'insieme degli utenti; tali decisori esprimono obiettivi diversi che non sono sempre aggregabili in una unica funzione obiettivo, nemmeno ricorrendo a fattori di scala, perché in (parziale o totale) contrasto tra loro. A ciò si aggiunge la necessità di esprimere l'efficacia delle varie soluzioni attraverso indicatori di non sempre facile definizione (per esempio la pericolosità, il confort ecc.), cioè di tipo qualitativo e non direttamente confrontabili con gli altri indicatori di tipo quantitativo.
Tutto questo ha fatto sì che, negli anni più recenti, si sia sviluppato un consistente studio sui problemi di decisione in presenza di obiettivi multipli e in generale di strutture decisionali complesse: tra questi, alcuni contributi sono specificamente orien

tati ai problemi ambientali e territoriali (Nijkamp, 1977, Haimes, 1977) e a quelli di localizzazione (ReVelle, Cohon e Shobrys, 1981).

I parametri fondamentali sono essenzialmente due:
- lo spazio,
- l'insieme delle funzioni obiettivo.

Riguardo al parametro spaziale, esistono contributi sia nel continuo (Nijkamp e Spronk, 1981, Wendell e McKelvey, 1981) che nel discreto (ReVelle, Cohon e Shobrys 1981, Moore e ReVelle, 1982). Riguardo all'insieme delle funzioni obiettivo ricordiamo che già in 5.2, presentando i problemi delle p-mediane e dei p-centri, si è fatto cenno all'esistenza di casi in cui due obiettivi devono coesistere: e spesso le funzioni obiettivo trattate sono appunto due, una di tipo più quantitativo,solitamente legata ai costi del servizio (per esempio il criterio dell'efficienza in 5.2), l'altra di tipo più qualitativo,solitamente legata ai livelli di qualità del servizio (per esempio il criterio del caso peggiore in 5.2).
Le applicazioni cominciano ad essere numerose nel settore pubblico (meno in quello privato), per la localizzazione sia di servizi richiesti che di servizi nocivi: una rassegna abbastanza esauriente dei vari problemi e dei differenti tipi di obiettivi da trattare è contenuta nell'insieme dei contributi di ReVelle (1982).

Come esempio di problema a più obiettivi, consideriamo il caso seguente
(i) spazio discreto,
(ii) presenza di soli costi di trasporto lineari,
(iii) impianti senza vincoli di capacità,
(iv) perfetta razionalità della struttura decisionale,
(v) obiettivi multipli.

Si tratta in pratica della generalizzazione del caso trattato in 5.2.
Gli obiettivi rispetto ai quali si vuole operare siano:
(α) minimizzazione della distanza media nel servizio di tutti gli utenti da p impianti,
(β) minimizzazione della distanza massima nel servizio di tutti gli utenti da p impianti,
(γ) massimizzazione della domanda degli utenti serviti da p impianti entro una distanza fissata,
(δ) minimizzazione degli impianti necessari nel servizio di tutti gli utenti entro una distanza fissata.

Spesso invece delle distanze d_{ij} si utilizzano i tempi t_{ij} di trasporto (per esempio nel caso dei servizi di emergenza): ovviamente nulla cambia di quanto segue, almeno a livello formale.

Sia

$$e_{ij} = e_{ij}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } d_{ij} \leqslant \tau \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (14)$$

l'elemento di una matrice di incidenza $\underline{\underline{E}}$ dipendente dal valore del parametro τ: nella (14) risulta

$e_{ij} = 1 \; (\forall i,j)$ per $\tau \longrightarrow \infty$,

$e_{ij} = 0 \; (i \neq j)$ per $\tau \longrightarrow 0$.

Sia inoltre

$$\varepsilon_j = 0{,}1 \; (\forall j) \qquad (15)$$

una variabile binaria che vale 1 se l'utente j è servito, vale 0 se non lo è.

La formulazione del problema può essere la seguente :

$$\min Z \qquad (16.a)$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} \, e_{ij} \, \delta_{ij} \geqslant \varepsilon_j \qquad (j = 1,\ldots,n) \qquad (16.b)$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{j} \, \delta_{ij} \leqslant n \, \delta_{ii} \qquad (i = 1,\ldots,n) \qquad (16.c)$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} \, \delta_{ii} \leqslant p \qquad (16.d)$$

$$\delta_{ij} = 0{,}1 \;, \quad \varepsilon_j = 0{,}1 \quad (\forall i,j) \qquad (16.e)$$

in cui, nei quattro casi, risulta

<u>caso (α)</u>: $\tau \rightarrow \infty$, $\varepsilon_j = 1 \; (\forall j)$

$$Z = \left(\frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{j} \, w_j \, d_{ij} \, \delta_{ij} \right)$$

<u>caso (β)</u>: $\tau \rightarrow \infty$, $\varepsilon_j = 1 \; (\forall j)$

$$Z = \left(\max_{i,j} \; w_j \, d_{ij} \, \delta_{ij} \right)$$

caso (γ): $\tau = \bar{\tau}$, $\varepsilon_j = 0,1$ (variabile decisionale)

$$Z = -\left(\sum_{1}^{n}{}_j\; w_j\, \varepsilon_j\right)$$

caso (δ): $\tau = \bar{\tau}$, $\varepsilon_j = 1\ (\forall j)$, $p = n$

$$Z = \left(\sum_{1}^{n}{}_i\; \delta_{ii}\right)$$

Il problema (α) è quello delle p-mediane, il problema (β) quello dei p-centri (limitatamente ai nodi), il problema (γ) quello detto di max-covering, il problema (δ) quello di set-covering.
Le condizioni (16.b) impongono che ogni utente sia servito (o *possa* essere servito, nel caso (γ) se $\varepsilon_j = 1$) da almeno un impianto.
Le condizioni (16.c) impongono che nessun utente possa essere servito dall'impianto i se esso non è aperto.
La disequazione (16.d) fissa un limite massimo al numero di impianti apribili.

Nella formulazione (16) sono compresi quattro problemi diversi, i cui obiettivi possono essere in (parziale) contrasto fra loro oppure non direttamente comparabili. Addirittura, il caso (γ) può, da solo, rappresentare problemi di natura anche molto diversa, a seconda del significato che si attribuisce al peso w_j: nel caso, per esempio, di protezione con servizi di emergenza il "valore" da proteggere nel nodo j può indicare popolazione, proprietà e beni privati, aree e beni pubblici presenti nel nodo j e così via, dando origine a obiettivi differenti.
Come trattare questi problemi? Cioè come trattare problemi che si possono formulare come

$$\min \quad \underline{\underline{f}}\,(\underline{\underline{x}}) \tag{17.a}$$

$$\text{con} \quad \underline{\underline{x}} \in X \tag{17.b}$$

dove $\underline{\underline{f}}\,(\underline{\underline{x}})$ è un vettore (*) di funzioni $f_1(\underline{\underline{x}}), f_2(\underline{\underline{x}}), \dots, f_l(\underline{\underline{x}})$?

Uno dei principali contributi teorici alla trattazione dei problemi di programmazione matematica con obiettivi multipli (e quindi anche del caso della localizzazione) risale a Kuhn e Tucker (1951) e fornisce due metodi, il metodo dei pesi ed il metodo dei vincoli, per determinare l'insieme delle soluzioni Pareto-ottime

---

(*) La programmazione matematica con obiettivi multipli è detta anche programmazione matematica vettoriale.

nello spazio delle funzioni obiettivo. Tale insieme è costituito dalle soluzioni $\underline{\underline{x}}^*$ che siano ammissibili per il problema (cioè che soddisfino le (17.b)) e per le quali non esistano altre soluzioni ammissibili $\underline{\underline{x}}$ tali che

$$f_h(\underline{\underline{x}}) \leqslant f_h(\underline{\underline{x}}^*) \qquad (h = 1,\dots,l) \qquad (18)$$

essendo la (18) verificata in senso stretto per almeno un indice h: si tratta cioè dell'insieme delle soluzioni di compromesso tra i vari obiettivi.
Non è questa la sede per un esame degli aspetti teorici e delle implicazioni metodologiche della programmazione a molti obiettivi: il lettore interessato può far riferimento oltre che ai numerosi contributi teorici, a Nijkamp (1977) per quanto riguarda gli aspetti più direttamente connessi con le applicazioni ai problemi territoriali.
Vale solo la pena di aggiungere che, essendo il problema (16) ed in molti casi quelli di localizzazione su grafo problemi di tipo discreto, l'insieme delle soluzioni paretiane è a sua volta un insieme discreto (costituito cioè da un numero finito di punti), il che fornisce alcuni vantaggi in termini operativi. Una serie di esempi di determinazione dell'insieme paretiano per problemi del tipo di quello formulato in (16) sono contenuti in ReVelle, Cohon e Shobrys (1981): nello stesso articolo è presentato un metodo di confronto tra i diversi obiettivi proprio basato sul fatto che si tratta di un problema di tipo discreto.

Per quanto riguarda gli approcci usati nella risoluzione, i metodi esatti si riconducono essenzialmente alle tecniche di determinazione della regione Pareto-ottima, fornendo l'insieme completo di soluzioni finali paretiane (metodi dei pesi e dei vincoli) o un sottoinsieme di esso (goal programming), mentre esistono anche numerosi metodi euristici (*) che forniscono di solito una soluzione finale unica (cioè un punto di compromesso tra i vari obiettivi). Le dimensioni dei problemi trattati sono quelle indicate nelle parti precedenti, dal momento che la presenza di più obiettivi non modifica la complessità del problema (al più introduce un fattore moltiplicativo nel tempo di esecuzione).

(*) Intendo in questo caso come metodi euristici quelli che non esprimono in modo analitico le caratteristiche delle varie funzioni obiettivo, ma ne forniscono una descrizione in termini qualitativi e/o di dominanza (Nijkamp, 1977, Palermo, 1981).

Applicazioni di queste tecniche ai problemi di localizzazione si hanno in Benito Alonso e Devaux (1981) per il caso di scuole per l'infanzia, Cohon et al. (1980) per quello di impianti di produzione di energia, Cohon et al. (1982) per quello di depositi di combustibile nucleare, Mayhew e Leonardi (1982) per i sistemi ospedalieri, ReVelle, Cohon e Shobrys (1981) per i servizi di emergenza.

Le generalizzazioni del problema a molti obiettivi sono da un lato quelle modellistiche, che consistono nel rendere più complesso il sistema di vincoli (costi di impianto, caso capacitivo, ecc.), dall'altro quelle concettuali, che corrispondono ad articolare maggiormente la struttura decisionale (sistemi a molti livelli, teoria dei giochi, ecc.): le une e le altre sono, per il momento, quasi esclusivamente teoriche.

Riassumiamo ora gli aspetti salienti del problema di localizzazione con obiettivi multipli secondo lo schema di valutazione introdotto in 5.1.

Algoritmi: sono abbastanza numerosi se li si considera derivabili dal corrispondente caso con un solo obiettivo, pochi se li si esamina come tecniche specifiche di programmazione a molti obiettivi.

Codici: sono molto pochi, citati in qualcuna delle applicazioni con riferimento ad alcuni risultati computazionali.

Teoria: è la teoria generale della programmazione matematica a molti obiettivi, con in più qualche contributo derivante dalla natura discreta del problema di localizzazione su grafo (sfruttata per confrontare tra loro le soluzioni paretiane).

Complessità: del tutto assente, se non come estensione dei corrispondenti casi con un solo obiettivo.

6. UN QUADRO RIASSUNTIVO

In questo paragrafo verrà tentata una sintesi delle caratteristiche principali relative all'uso dei modelli matematici per la risoluzione dei problemi di localizzazione. Verranno inoltre identificate alcune possibili linee di avanzamento della ricerca nel settore.

L'indicazione delle tendenze passate e degli sviluppi futuri è tratta principalmente dall'esame delle riviste internazionali ed italiane sia nel settore teorico (ricerca operativa, programmazione matematica, teoria dei grafi e ottimizzazione combinatoria) che in quello delle applicazioni (management, pianificazione territoriale, trasporto).

In particolare sono state esaminate le annate più recenti delle seguenti riviste:

- *Operations Research*,
- *European Journal of Operational Research*,
- *Ricerca Operativa*,
- *Mathematical Programming*,
- *Networks*,
- *Discrete Mathematics*,
- *Management Science*,
- *Environment and Planning*,
- *Sistemi Urbani*,
- *Transportation Science*.

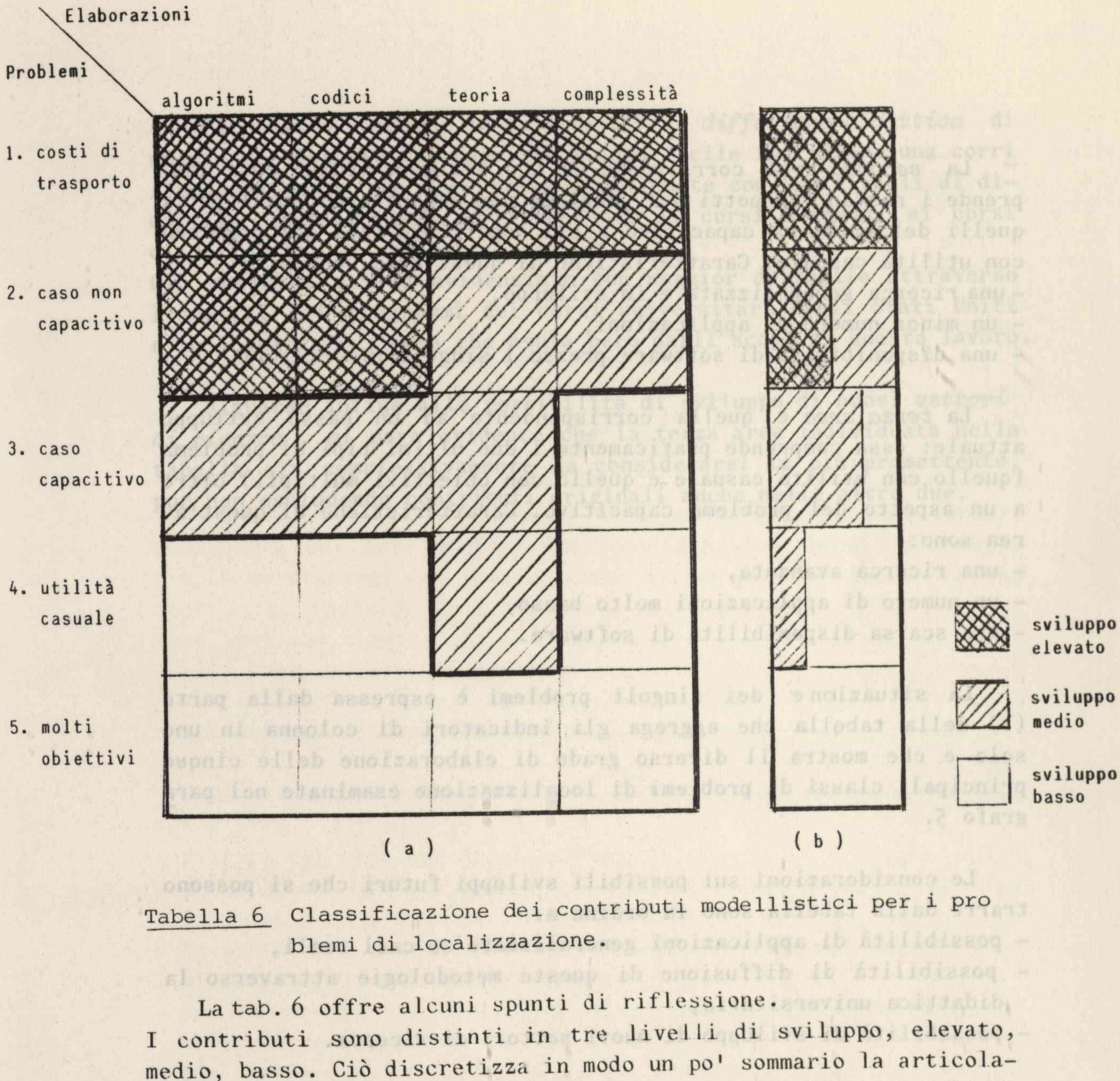
Esistono naturalmente altre riviste (forse meno significative dal punto di vista modellistico) ed esistono naturalmente articoli importanti non apparsi sulle dieci riviste citate (o apparsi precedentemente). Al materiale suddetto si è quindi aggiunto l'esame di un ulteriore insieme di articoli significativi, oltre ai principali libri comparsi negli anni più recenti.
Non mi è sembrato utile, tuttavia, costruire un lavoro che fosse una bibliografia più o meno esaustiva dell'esistente. Perciò ho cercato di fornire una linea interpretativa più che di raccogliere un gran numero di articoli: i lavori citati non sono infatti moltissimi, si tratta di quelli che, a mio parere, sono i più importanti o contengono significativi rimandi (per esempio alcune rassegne).

Un primo dato emerge da questo esame: i contributi sono molti e continui, anche se cominciano ad essere meno che in passato. In particolare, esaminando lo sviluppo nel tempo delle ricerche suddivise nei cinque livelli identificati in 5.1, si può rilevare il progressivo calo dei contributi nei primi livelli di fronte al recente aumento di quelli nei livelli di complessità maggiore: ciò conforta, anche storicamente, la interpretazione delle cinque classi esaminate in 5.2-5.6 come articolazioni via via più rigorose del problema della localizzazione, da un lato per renderlo più realistico rimuovendo le ipotesi maggiormente restrittive, dall'altro per sfruttare meglio le potenzialità teoriche e computazionali offerte dal progredire delle tecniche di risoluzione.

Il principale elemento di valutazione è offerto dall'esame dei differenti parametri introdotti in 5.1, e cioè:
- algoritmi (esatti ed euristici),
- codici di calcolo,
- elaborazione teorica,
- complessità computazionale.

Questi quattro mi paiono i principali stadi attraverso cui passa, di norma, l'elaborazione modellistica di un problema: inizialmente vengono proposti degli algoritmi di risoluzione, il più delle volte sviluppati "ad hoc"; segue poi un confronto tra gli algoritmi attraverso la realizzazione di codici di calcolo e l'esame, tramite essi, di alcuni problemi campione e dei relativi tempi di risoluzione; dopo che un certo insieme di tecniche risolutive si sono assestate, si ha una fase di rielaborazione teorica e di inquadramento degli algoritmi esistenti e dei risultati ottenuti all'interno di metodologie generali; infine il confronto non si sviluppa più tra i singoli algoritmi e codici di calcolo ma tra le classi di problemi (e le tecniche di risoluzione) mediante lo studio della loro complessità computazionale.

L'esame combinato dei differenti tipi di problemi di localizzazione e dei differenti stadi di elaborazione è espresso dalla tab. 6, che costituisce in un certo senso il quadro riassuntivo di questo lavoro.



<u>Tabella 6</u> Classificazione dei contributi modellistici per i problemi di localizzazione.

La tab. 6 offre alcuni spunti di riflessione.
I contributi sono distinti in tre livelli di sviluppo, elevato, medio, basso. Ciò discretizza in modo un po' sommario la articolazione dei risultati esposti nelle varie parti del paragrafo 5, ma permette di individuare tre aree di sviluppo diverse all'interno del filone modellistico nella risoluzione dei problemi di localizzazione.

La *prima area* è quella corrispondente allo sviluppo più elevato: essa comprende praticamente tutti gli aspetti del problema con soli costi di trasporto e parte di quelli del problema non capacitivo. Caratteristiche di quest'area sono:
- una ricerca ormai assestata e generalizzata,
- un elevato numero di applicazioni,
- un' ampia disponibilità di software.

La *seconda area* corrisponde ad uno sviluppo medio: essa comprende i restanti aspetti del problema non capacitivo, quasi tutti quelli del problema capacitivo e gli aspetti teorici del problema con utilità casuale. Caratteristiche di quest'area sono:
- una ricerca generalizzata e in sviluppo,
- un minor numero di applicazioni,
- una disponibilità di software presso i singoli ricercatori.

La *terza area* è quella corrispondente ad un basso sviluppo attuale: essa comprende praticamente i due ultimi tipi di problema (quello con utilità casuale e quello con obiettivi multipli) oltre a un aspetto del problema capacitivo. Caratteristiche di quest'area sono:
- una ricerca avanzata,
- un numero di applicazioni molto basso,
- una scarsa disponibilità di software.

La situazione dei singoli problemi è espressa dalla parte (b) della tabella che aggrega gli indicatori di colonna in uno solo e che mostra il diverso grado di elaborazione delle cinque principali classi di problemi di localizzazione esaminate nel paragrafo 5.

Le considerazioni sui possibili sviluppi futuri che si possono trarre dalla tabella sono in ordine a:
- possibilità di applicazioni generalizzate su casi reali,
- possibilità di diffusione di queste metodologie attraverso la didattica universitaria,
- possibilità di sviluppo di nuovi settori di ricerca.

Riguardo alle possibili *applicazioni* delle tecniche descritte in questo lavoro, è senz'altro lecito affermare che esse, già esistenti da tempo nei problemi 1, 2 e 3, si stanno concretizzando anche per i problemi 4 (Bertuglia, Leonardi e Tadei 1981) e 5 (Cohon et al., 1980).
Applicazioni di questo genere, per il momento ancora isolate, potranno costituire un interessante tema da sviluppare anche riguardo all'uso di modelli integrati (per esempio i modelli di localizzazione e trasporto).

Per quanto concerne le possibilità di *diffusione didattica* di queste metodologie, mi pare abbastanza facile ipotizzare una corrispondenza delle tre aree prima individuate con tre livelli di didattica universitaria corrispondenti ai corsi normali, ai corsi di dottorato, ai seminari.
Ciò potrebbe essere evidenziato con maggior dettaglio attraverso l'analisi dei programmi dei corsi universitari negli Stati Uniti e in Inghilterra, cosa che esula però dagli scopi di questo lavoro.

Riguardo infine alle possibilità di sviluppo di nuovi *settori di ricerca* , mi pare evidente che la terza area individuata nella tabella sia complessivamente da considerarsi la più promettente, pur non escludendo contributi originali anche nelle altre due.

Per quanto concerne le possibilità di *diffusione* didattica di queste metodologie, mi pare abbastanza facile ipotizzare una corrispondenza delle tre aree prima individuate con tre livelli di didattica universitaria corrispondenti ai corsi normali, ai corsi di dottorato, ai seminari.
Ciò potrebbe essere evidenziato con maggior dettaglio attraverso l'analisi dei programmi dei corsi universitari negli Stati Uniti e in Inghilterra, cosa che esula però dagli scopi di questo lavoro.

Riguardo infine alle possibilità di sviluppo di nuovi settori di ricerca, mi pare evidente che la terza area individuata nella tabella sia complessivamente da considerarsi la più promettente, pur non escludendo contributi originali anche nelle altre due.

7. CONCLUSIONI

Viene ora ripreso, con una sintesi schematica (a costo di esserlo eccessivamente), il contenuto di questo lavoro e ne sono tratte alcune conclusioni.

Inizialmente (paragrafo 1) è stata fornita una definizione del problema di localizzazione, affrontato
- dal punto di vista quantitativo
- per mezzo dei modelli di ottimizzazione
- per il caso di strutture monosettoriali
- per i settori privato e pubblico.

Attraverso una serie di esempi si sono definiti alcuni aspetti unificanti dei vari problemi di localizzazione. Sono state esposte le motivazioni del lavoro nonché alcune premesse metodologiche. Sono stati individuati tre momenti nello sviluppo delle tecniche modellistiche, legati prevalentemente
- alla formulazione del problema
- all'impiego dei modelli nel settore privato
- all'impiego dei modelli nel settore pubblico.

In seguito (paragrafo 2) si è fornita una rappresentazione del sistema, mettendo in luce
- i costi del problema localizzativo
- i problemi connessi con quello della localizzazione (di tipo strategico e di tipo tattico-operativo)
- le principali differenze tra la localizzazione nel settore pubblico e quella nel settore privato
- un insieme di sei diversi problemi nel caso di localizzazione nel settore pubblico
- due differenti formulazioni degli obiettivi
- i principali fattori localizzativi e la loro rilevanza
- le condizioni in cui si svolge il processo decisionale.

Si è poi passati (paragrafo 3) all'analisi del problema attraverso
- l'esame di alcuni parametri: spazio, tempo, settore, produzione, funzione obiettivo, tipo di costo, funzioni di costo, domanda, capacità, numero di impianti;

- l'esame della struttura del modello: tipi di funzione obiettivo,
  tipi di vincoli ,
  compatibilità tra obiettivi
  e vincoli.

Sono poi stati esaminati (paragrafo 4) i principali approcci alla risoluzione del problema di localizzazione, distinguendoli in
- metodi esatti
- metodi euristici.

Essendo il problema NP-completo, sono stati infatti sviluppati molti algoritmi euristici. E' stato segnalato un aspetto importante, anche se poco studiato, costituito dal condizionamento degli algoritmi di risoluzione rispetto alla struttura dei dati del problema.

Il paragrafo 5 costituisce il nucleo centrale del lavoro: in esso sono stati esaminati i principali modelli di localizzazione, raggruppati in classi di complessità crescente
- modelli con soli costi di trasporto
- modelli con rendimenti crescenti
- modelli con vincoli tecnologici
- modelli con funzioni di utilità casuale
- modelli con obiettivi multipli.

I vari modelli sono stati esaminati in base ai quattro parametri di valutazione
- algoritmi
- codici di calcolo
- teoria
- complessità computazionale.

In particolare, il primo modello è stato descritto sia nel caso discreto che nel caso continuo, sia con funzione obiettivo basata sul criterio dell'efficienza che con quella basata sul criterio del caso peggiore.
Il secondo ed il terzo modello sono stati descritti nel caso discreto e con funzione obiettivo basata sul criterio dell'efficienza, con costi di impianto del tipo a carica fissa e di tipo concavo. Del terzo modello sono state esposte alcune possibili generalizzazioni.
Il quarto modello è stato descritto nel caso discreto e con funzione obiettivo comprendente termini di costo e termini di utilità

casuale che misurano il grado di dispersione dell'utenza rispetto alla soluzione di perfetta razionalità.
Il quinto modello è stato descritto, nel caso discreto, per varie formulazioni della funzione obiettivo che rappresentano criteri di scelta tra loro in (parziale) contrasto.

Infine (paragrafo 6) è stato proposto un quadro riassuntivo che esamina congiuntamente

- i diversi modelli di localizzazione
- i diversi parametri di valutazione

al fine di fornire alcune indicazioni su possibili sviluppi futuri nei settori

- delle applicazioni
- della didattica
- della ricerca.

A questo punto desidero trarre poche conclusioni.
La prima è che lo strumento modellistico può avere, in generale, due modi di utilizzo:
(a) come formalizzazione di problemi teorici,
(b) come supporto operativo alle decisioni in problemi reali.
Mi pare che nel caso dei modelli di localizzazione il primo modo stia diventando prevalente rispetto al secondo, mentre sarebbe auspicabile quanto meno un riequilibrio.
La seconda è che sarebbe ormai utile che, di fianco alla proposta continua di nuovi algoritmi, si esprimesse un qualche ulteriore tentativo (qualcuno già c'è) di creazione di una *teoria modellistica* della localizzazione.
La terza, ovvia, è che l'approccio modellistico non è l'unico (e in molti casi neppure il migliore) tra quelli utilizzabili: ne esistono di meno formalizzati e di più attenti ai non trascurabili aspetti qualitativi del problema.
L'esame di essi è compito di altri contributi di questo libro.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Akinc C.V., Khumavala B.M. (1977) An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem, *Management Science, 23*, 585-594.

Bartezzaghi E. (1979) Modelli di Localizzazione Industriale, in Colorni A.(ed.) *Modelli di Localizzazione e Distribuzione nella Gestione dell'Ambiente e del Territorio*, CLUP, Milano, 139-178.

Bartezzaghi E., Colorni A., Palermo P.C. (1976) Considerazioni su Alcune Classi di Modelli di Localizzazione, in Lombardini S., Ruberti A. (eds.) *Teoria dei Sistemi ed Economia*, Il Mulino, Bologna, 45-78.

Bartezzaghi E., Colorni A., Palermo P.C. (1981) A Search Tree Algorithm for Plant Location Problems, *European Journal of Operational Research*, *7*, 371-379.

Beltrami E.J. (1977) *Models for Public Systems Analysis*, Academic Press, New York.

Beltrami E.J.. (1979) Localizzazione di Servizi e Impiego dei Servizi di emergenza, in Colorni A.(ed.) *Modelli di Localizzazione e Distribuzione nella Gestione dell'Ambiente e del Territorio*, CLUP, Milano, 178-210.

Benito-Alonso M.A., Devaux P. (1981) Location and Size of Day Nurseries; a Multiple Goal Approach , *European Journal of Operational Research, 6*, 195-198.

Berman O., Odoni A.R. (1982) Locating Mobile Servers on a Network with Markovian Properties, *Networks, 12*, 73-86.

Bertuglia C.S., Leonardi G. (1982) Localizzazione Ottimale dei Servizi Pubblici, in Bielli M., La Bella A. (eds.) *Problematiche dei livelli Sub-regionali di Programmazione*, Angeli, Milano, 286-313.

Bertuglia C.S., Leonardi G., Tadei R. (1981) Localizzazione Ottimale dei Servizi Pubblici con Esperienze sulle Scuole dell'Area Torinese, Atti delle Giornate AIRO, Torino, vol. 1, 67-250.

Bodin L. (1973) Towards a General Model for Manpower Scheduling, *Urban Analysis, 1*, 191-208 (parte 1), 223-246 (parte 2).

Bodin L., Golden B., Assad R., Ball M. (1981) The State of Art in the Routing and Scheduling of Vehicles and Crews, Working Paper MS/S 81-035, University of Maryland, College Park.

Camerini P.M., Colorni A., Maffioli F. (1983) Some Experience in Applying a Stochastic Method to Location Problems, Atti del Netflow 83, Pisa.

Chalmet L.G., Francis R.L., Kolen A. (1981) Finding Efficient Solutions for Rectilinear Distance Location Problems Efficiently, *European Journal of Operational Research, 6*, 117-124.

Cristofides N., Beasley J.E. (1982) A Tree Search Algorithm for the p-Median Problem, *European Journal of Operational Research , 10*, 196-204.

Coelho J.D. (1981) Public Facility Location: a Survey of Recent Developments, Atti delle Giornate AIRO, Torino, vol. 1, 29-65.

Cohon J.L., ReVelle C., Current J., Eagles T.W., Eberhart R.,Church R. (1980) Application of a Multiobjective Facility Location Model to Power Plant Siting in a Six-State Region of the U.S., *Comput. & Operations Research, 7*, 107-123.

Cohon J.L., ReVelle C., Shobrys D.E., Margulies T.S., Hereford L.G., Eagles T.W. (1982) Location Systems Analysis of Away - from - Reactor Spent Fuel Storage Facilities, New Directions in Nuclear Energy with Emphasis on Fuel Cycles, Bruxelles.

Colorni A. (1982) Esperienze di Localizzazione di Servizi Collettivi in Italia e all'estero, 3° Corso su Tecniche e Modelli per la Programmazione Regionale, AISRe, Capri.

Colorni A., Romeo F., Scattolini R., Zanoni M. (1979) Alcuni Programmi di Calcolo per Problemi di Localizzazione e Distribuzione, in Colorni A.(ed.) *Modelli di Localizzazione e Distribuzione nella Gestione dell'Ambiente e del Territorio*, CLUP, Milano, 397-468.

Cornuejols G., Fisher M.L., Nemhauser G.L. (1977) Location of Bank Accounts to Optimize Float: an Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms, *Management Science*, *23*, 789-810.

Drezner Z., Wesolowsky G.O. (1980) Single Facility l_p-Distance Minimax Locations, *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Mathematics*, *1*, 315-321.

Efroymson M.A., Ray T.L. (1966) A Branch and Bound Algorithm for Plant Location, *Operations Research*, *14*, 361-368.

Eilon S., Watson-Gandy C.D.T., Christofides N. (1971) *Distribution Management: Mathematical Modelling and Practical Analysis*, Griffin, Londra.

Erlenkotter D. (1978) A Dual Based Procedure for Uncapacitated Facility Location, *Operations Research*, *26*, 992-1009.

Erlenkotter D. (1981) A Comparative Study of Approaches to Dinamic Location Problems, *European Journal of Operational Research*, *6*, 133-143.

Ermoliev Y., Leonardi G. (1981) Some Proposals for Stochastic Facility Location Models, *Sistemi Urbani*, *3*, 455-470.

Feldman E., Lehrer F.A., Ray T.L. (1966) A Warehouse Location under Continuous Economies of Scale, *Management Science*, *12*, 670-684.

Fortak H.G. (1982) Source Allocation and Design via Simulation Models, in Fronza G., Melli P. (eds.) *Mathematical Models for Planning and Control of Air Quality*, Pergamon Press, Oxford, 91-107.

Francis R.L., Goldstein J.M. (1974) Location Theory: a Selective Bibliography, *Operations Research*, *22*, 400-410.

Gallo G., Pallottino S. (1982) Introduction and Recent Advances in Shortest Path Methods, 1 st. Course on Transportation Planning Models, ICTS-CNR, Amalfi.

Garey M.R., Johnson D.S. (1979) *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H.Freeman & Co., San Francisco.

Garfinkel R.S., Neebe A.W., Rao M.R. (1977) The m-Center Problem: Minimax Facility Location, *Management Science*, *23*, 1133-1142.

Garfinkel R.S., Nemhauser G.L. (1972) *Integer Programming*, John Wiley, New York.

Geoffrion A., McBride R. (1978) Lagrangean Relaxation Applied to Capacitated Facility Location Problems, *AIIE Transactions*, *10*, 40-47.

Goldman A.J. (1971) Optimal Center Location in Simple Networks, *Transportation Science*, *5*, 212-221.

Gray P. (1971) Exact Solution of the Fixed Charge Transportation Problem, *Operations Research*, *19*, 1529-1538.

Greenberg M.R. (1978) *Applied Linear Programming for the Socio-economic and Environmental Sciences*, Academic Press, New York.

Haimes Y.Y. (1977) *Hierarchical Analyses of Water Resources Systems*, McGraw-Hill, New York.

Hakimi S.L. (1964) Optimum Location of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph, *Operations Research*, *12*, 450-459.

Hakimi S.L. (1965) Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems, *Operations Research*, *13*, 462-475.

Halpern J., Maimon O. (1982) Algorithms for the m-Center Problems: a Survey, *European Journal of Operational Research*, *10*, 90-99.

Handler G.Y. (1979) Complexity and Efficiency in Minimax Network Location, in Christofides N. et al.(eds.) *Combinatorial Optimization*, Wiley-Interscience, New York.

Handler G.Y., Mirchandani P.B. (1979) *Location on Networks Theory and Algorithms*, The MIT Press, Cambridge, Massachussets.

Hansen P., Thisse J.F. (1981) Recent Advances in Continuous Location Theory, Atti delle Giornate AIRO, Torino, vol. 1, 1-27.

Helly W. (1975) *Urban Systems Models*, Academic Press, New York.

Hochbaum D.S. (1982) Heuristics for the Fixed Cost Median Problem, *Mathematical Programming*, *22*, 148-162.

Jarvinen P., Rajala J., Sinervo H. (1972) A Branch and Bound Algorithm for Seeking the p-Median, *Operations Research*, *20*, 173-178.

Kariv O., Hakimi S.L. (1979) An Algorithmic Approach to Network Location Problem. Part I: the p-Centers, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *37*, 513-538.

Karp R.M. (1972) Reducibility among Combinatorial Problems, in Miller R.E., Thatcher J.W. (eds.) *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, 85-103.

Kennington J., Unger E. (1976) A New Branch and Bound Algorithm fort the Fixed Charge Transportation Problem, *Management Science*, *22*, 1116-1126.

Khumavala B.M. (1972) An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Warehouse Location Problem, *Management Science*, B718-B731.

Krarup J., Pruzan M.P. (1981) Reducibility of Minimax to Minisum 0-1 Programming Problems, *European Journal of Operational Research*, *6*, 125-132.

Kuehn A.A., Hamburger M.J. (1963) A Heuristic Program for Locating Warehouses, *Management Science*, *9*, 643-666.

Kuhn H.W. (1973) A Note of Fermat's Problem, *Mathematical Programming*, *4*, 98-107.

Kuhn H.W., Tucher A.W. (1951) Nonlinear Programming, in Neyman J. (ed.) *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, 481-492.

Larson R.C., Odoni A.R. (1981) *Urban Operation Research*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Leonardi G. (1978) Optimum Facility Location by Accessibility Maximizing, *Environment and Planning A, 10*, 1287-1305.

Leonardi G. (1981) A Unifying Framework for Public Facility Location Problems, *Environment and Planning A*, *13*, 1001-1028, 1085-1108.

Loucks D.P., Stedinger J.R., Haith D.A. (1981) *Water Resource Systems Planning and Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Manne A. (1964) Plant Location under Economies-of-Scale. Decentralization and Computation, *Management Science*, *11*, 213-235.

Maranzana F.E. (1964) On the Location of Supply Points to Minimize Transport Costs, *Operational Research Quarterly*,*15*, 261-270.

Marks D.H. (1976) Modeling in Solid Waste Management: a State of Art Review, Proc. of the Conference on Environmental Modeling and Simulation, Cincinnati.

Mayhew L.D., Leonardi G. (1982) Equity, Efficiency and Accessibility in Urban and Regional Health - Care Systems,*Environment and Planning A*, *14*, 1479-1507.

McKeown P. (1975) A Vertex Ranking Procedure for Solving the Linear Fixed Charge Problem, *Operations Research*, *23*, 1183-1191.

Miehle W. (1958) Link-Length Minimization in Networks, *Operations Research*, *6*, 232-243.

Minieka E. (1970) The m-Center Problem, *SIAM Review*, *12*, 138-139.

Moore G.C., ReVelle C. (1982) The Hierarchical Service Locations Problem, *Management Science*, *28*, 775-780.

Murthy K.G. (1968) Solving the Fixed Charge Problem by Ranking the Extreme Points, *Operations Research*, *16*, 268-279.

Nagelhout R.V., Thompson G.L. (1981) A Cost Operator Approach to Multistage Location-Allocation, *European Journal of Operat ional Research*, *6*, 149-161.

Nijkamp P. (1977) *Theory and Application of Environmental Economics*, North-Holland, Amsterdam.

Nijkamp P., Rietveld P. (1980) Recent Development in Linear and Nonlinear Multiobjective Programming for Multilevel Systems, *Ricerca Operativa*, *15*, 5-33.

Nijkamp P., Spronk J. (1981) Interactive Multimensional Programming Models for Locational Decisions, *European Journal of Operational Research*, *6*, 220-223.

Palermo P.C. (1981) *Politiche Territoriali e Modelli*, F.Angeli, Milano.

ReVelle C. (1982) Lezioni tenute al 3° Corso su Tecniche e Modelli per la Programmazione Regionale, AISRe, Capri.

ReVelle C., Cohon J.L., Shobrys D.E. (1981) Multiple Objective Facility Location, *Sistemi Urbani*, *3*, 319-343.

ReVelle C., Marks D.H., Liebman J.C. (1970) An Analysis of Private and Public Sector Location Models, *Management Science*, *16*, 692-707.

Rinaldi S., Soncini-Sessa R., Stehfest H., Tamura H. (1979) *Modeling and Control of River Quality*, McGraw-Hill, New York.

Ross T.G., Soland R.M. (1977) Modeling Facility Location Problems as Generalized Assignment Problems, *Management Science*, *24*, 345-357.

Sa' G. (1969) Branch and Bound and Approximate Solutions to the Capacitated Plant Location Problem, *Operations Research, 17*, 1005-1016.

Salkin H.M. (1975) *Integer Programming*, Addison Wesley, Reading, Massachussets.

Schaefer M.K., Hurter A.P. (1974) An Algorithm for the Solution of a Location Problem with Metric Constraints, *Naval Research Logistics Quarterly, 21*, 625-636.

Scherer F.M., Beckenstein A., Kaufer E., Murphy R.D. (1975) *The Economics of Multi-plant Operation*, Harvard University Press, Cambridge.

Shamos M.I., Hoey D. (1975) Closest Point Problems, Proc. of the 16th Annual Symposium on Fundations of Computer Science, IEEE, Berkeley, 151-162.

Sheppard E.S. (1981) Public Facility Location with Elastic Demand: Users' Benefits and Redistribution Issues, *Sistemi Urbani, 3*, 435-454.

Sisson R.L.(ed.)(1974) *A Guide to Models in Governmental Planning and Operations*, U.S. Environmental Protection Agency, Washington.

Sistemi Urbani (1981), *3*, 3 (numero speciale).

Soland R.M. (1974) Optimal Facility Location with Concave Costs, *Operations Research, 22*, 373-382.

Spielberg K. (1969) Algorithms for the Simple Plant Location Problem with Some Side Conditions, *Operations Research, 17*, 85-111.

Swain R.W. (1974) A Parametric Decomposition Approach for the Solution of Uncapacitated Location Problems, *Operations Research, 22*, 189-198.

Teitz M.B., Bart P. (1968) Heuristic Methods for Estimating the Generalized Vertex Median of a Weighted Graph, *Operations Research, 16*, 955-961.

Van Roy T.J., Erlenkotter D. (1982) A Dual-Based Procedure for Dynamic Facility Location, *Management Science, 28*, 1091-1105.

Walker W.E. (1976) A Heuristic Adjacent Extreme Point Algorithm for the Fixed Charge Problem, *Management Science*, 22, 587-596.

Warszawski A. (1974) Pseudo-Boolean Solutions to Multidimensional Location Problems, *Operations Research*, 22, 1081-1085.

Weber A. (1909) Uber den Standort der Industrien, tradotto in Friedrich C.J. (ed.) *Alfred Weber's Theory of Location of Industries*, University of Chicago Press, Chicago.

Wendell R.E., McKelvey R.D. (1981) New Perspectives in Competitive Location Theory, *European Journal of Operational Research*, 6, 174-182.

Wesolowsky G.O., Truscott W.G. (1975) The Multiperiod Location-Allocation Problem with Relocation of Facilities, *Management Science*, 22, 57-65.

Wilson A.G., Coelho J.D., MacGill S.M., Williams H.C. (1981) *Optimization in Locational and Transport Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

Zimmermann H.J., Sovereign M.G. (1974) *Quantitative Models for Production Management*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

WORKING PAPERS

*1 "Un modello urbano a larga scala per l'area metropolitana di Torino", *gennaio 1981*

*2 "Metodologie per la pianificazione dei parchi regionali", *gennaio 1981*

*3 "A Large Scale Model for Turin Metropolitan Area", *maggio 1981*

*4 "An Application to the Ticino Valley Park of a Mathematical Model to Analyse the Visitors Behaviour", *luglio 1981*

*5 "Applicazione al parco naturale della Valle del Ticino di un modello per l'analisi del comportamento degli utenti: la calibrazione del modello", *settembre 1981*

*6 "Applicazione al parco naturale della Valle del Ticino di un modello per l'analisi del comportamento degli utenti: l'uso del modello", *settembre 1981*

*7 "Un'analisi delle relazioni esistenti tra superficie agricola utilizzata ed alcune principali grandezze economiche in un gruppo di aziende agricole piemontesi al 1963 e al 1979", *settembre 1981*

*8 "Localizzazione ottimale dei servizi pubblici, con esperimenti sulle scuole dell'area torinese", *settembre 1981*

*9 "La calibrazione di un modello a larga scala per l'area metropolitana di Torino", *ottobre 1981*

*10 "Applicazione al parco naturale della Valle del Ticino di un modello per l'analisi del comportamento degli utenti: l'individuazione di un indicatore di beneficio per gli utenti ed una analisi di sensitività su alcuni parametri fondamentali", *ottobre 1981*

*11 "La pianificazione dell'uso ricreativo di aree naturali: il caso del parco della Valle del Ticino", *novembre 1981*

*12 "The Recreational Planning of Country Parks: the Case Study of the Ticino Valley Park", *marzo 1982*

*13 "Alcuni aspetti della calibrazione di un modello dinamico spazializzato: il caso del modello dell'area metropolitana torinese", *settembre 1982*

*14 "L'applicazione di un modello dinamico a larga scala per l'area metropolitana di Torino: la calibrazione", *novembre 1982*

*15 "Modello commerciale Piemonte", *novembre 1982*

*16 "Resource allocation in multi-level spatial health care systems: benefit maximisation", *dicembre 1982*

*17 "Relazione sulla struttura e sulla dinamica del settore elettromeccanico piemontese", *dicembre 1982*

*18 "Evoluzione della finanza locale in Piemonte e in Italia 1977 - 1981", *febbraio 1983*

*19 "Un metodo per l'analisi di scenari multidimensionali in ordine alle relazioni tra domanda di trasporto e variabili strutturali dei sistemi economici e territoriali", *febbraio 1983*

20 "Modello commerciale Piemonte", *marzo 1983*

*21 "Calibrating the residential location submodel of the simulation moder for the Turin metropolitan area", *giugno 1983*

*22 "Dinamiche spaziali dell'area metropolitana di Torino negli ultimi tre decenni", *giugno 1983*

*23 "Struttura economica delle imprese del dettaglio alimentare in Piemonte – prime valutazioni", *luglio 1983*

*24 "The dynamics of Turin metropolitan area: a model for the analysis of the processes and for the policy evaluation", *agosto 1983*

25 "Un'analisi, con il modello RAMOS, della struttura spaziale del servizio sanitario regionale: il caso del Piemonte", *settembre 1983*

26 "Manuale per l'uso del modello RAMOS (Resource Allocation Model Over Space)", *settembre 1983*

27 "The spatial dynamics of the Turin metropolitan area: an analysis of the last three decades", *ottobre 1983*

*28 "Un modello del sistema urbano di Torino: alcune valutazioni di un'esperienza modellistica", *novembre 1983*

*29 "Il conto economico dei comparti manifatturieri piemontesi, 1980 – Elaborazioni su dati rilevati dall'ISTAT sul Prodotto Lordo delle imprese manifatturiere con sede sociale in Piemonte", *novembre 1983*

30 "Interrelazioni tra localizzazioni e trasporti: stato dell'arte e possibili linee di sviluppo futuro", *gennaio 1984*

31 "Fondamenti per un approccio unificante all'analisi del comportamento della domanda in un sistema localizzazioni-trasporti", *gennaio 1984*

32 "Location-transport relationships: state-of-the-art, unifying efforts and future developments", *maggio 1984*

*33 "Modelli di allocazione spaziale delle risorse sanitarie: la ricerca in corso all'IRES di Torino", *maggio 1984*

*34 "Modelli per la determinazione delle aree di intervento dei servizi di emergenza", *giugno 1984*

*35 "Aspetti metodologici e proposta di modello di clustering dinamico per la identificazione di aree omogenee sanitarie", *settembre 1984*

*36 "Models for health care planning: the case of the Piemonte Region", *ottobre 1984*

*37 "The potential for day hospitals in Piemonte. A feasibility study", *ottobre 1984*

*38 "Il principio di equità nella localizzazione degli ospedali: una sperimentazione del modello RAMOS^{-1} al caso del Piemonte", *ottobre 1984*

*39 "Manuale per l'uso del modello RAMOS^{-1}", *ottobre 1984*

40 "Il modello IRES per l'area metropolitana di Torino: struttura formale, base di dati, uso per la pianificazione", *novembre 1984*

41 "SMIT – Sistema di modelli integrati di trasporto. Procedura per l'uso: manuale e software", *dicembre 1984*

42 "Teorie di localizzazione di servizi, con particolare riferimento all'esperienza italiana", *gennaio 1985*

43 "Analisi di produttività e costo dei servizi ospedalieri pubblici in Piemonte", *gennaio 1985*

44 "Progetto di modello integrato per l'analisi dinamica delle interrelazioni localizzazioni-trasporti", *febbraio 1985*

45 "Il Sistema dei trasporti nella pianificazione regionale e locale", *marzo 1985*

46 "Sistema di modelli integrati di trasporto: metodologia, software e sperimentazione", *marzo 1985*

47 "Il prodotto lordo nei comprensori piemontesi nel decennio 1971 - 1981", *marzo 1985*

48 "Rapporto preliminare per un osservatorio regionale sul mercato del lavoro pubblico", *marzo 1985*

49 "Studio sui bilanci delle aziende agricole della rete contabile regionale piemontese", *febbraio 1985*

50 "Recenti contributi alla modellistica urbana", *maggio 1985*

51 "Interrelazioni tra localizzazioni e trasporti: stato dell'arte, proposte per un quadro di riferimento unificante e possibili linee di sviluppo futuro", *maggio 1985*

52 "L'approccio dell'equilibrio delle attività economiche nella teoria della localizzazione", *maggio 1985*

53 "L'approccio dell'economia urbana con particolare riferimento alle interrelazioni tra trasporti e struttura spaziale", *maggio 1985*

54 "Un modello spaziale marxiano di produzione e trasporto nei sistemi urbani e regionali", *maggio 1985*

55 "Teoria ed applicazioni dei modello compartimentali deterministi e stocastici: lo stato dell'arte", *maggio 1985*

56 "L'approccio della teoria delle utilità casuali con particolare riferimento alla mobilità della popolazione", *maggio 1985*

57 "Un modello dinamico per la simulazione di un mercato delle abitazioni non in equilibrio", *maggio 1985*

---

* Esaurito

ires ISTITUTO RICERCHE ECONOMICO - SOCIALI DEL PIEMONTE
VIA BOGINO 21 10123 TORINO